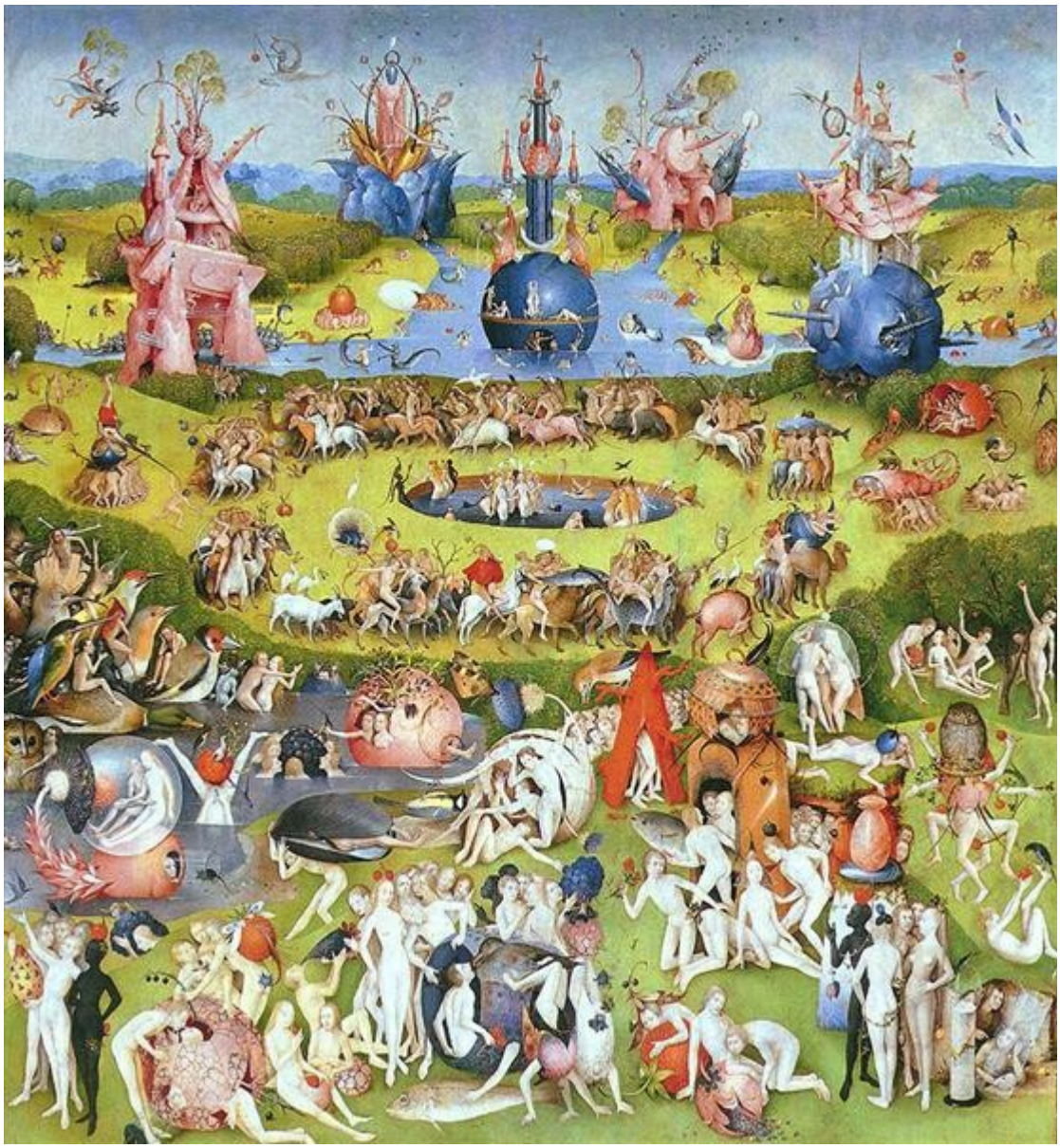
El mundo de los números

Yasser A. Chavez



By El Bosco

RESUMEN TÉCNICO

Este proyecto pedagógico, titulado El Mundo De Los Números y sus continuaciones, presenta un enfoque narrativo y experimental para la enseñanza de matemáticas, centrado en secuencias numéricas, sumas de potencias y computación simbólica. El primer texto introduce una metodología basada en tres familias de secuencias —combinatoria C(n, k), sumas S(n, k) y números de Narayana N(n, k)— para derivar fórmulas cerradas de sumas de potencias (desde k^1 hasta k^5 sin depender del álgebra tradicional, utilizando en su lugar operaciones aritméticas sobre los términos de las secuencias. Se enfatiza el descubrimiento guiado mediante dos rutas: una lúdica (Ruta 1) y otra estructurada y rigurosa (Ruta 2).

El segundo texto extiende el enfoque a sumas con signos alternados para p = 1, 2, 3 y 4, integrando una narrativa fantástica con personajes como Sophie (en homenaje a Sophie Germain) y promoviendo el uso de un "diario del explorador" para registrar identidades. El tercer texto introduce un laboratorio en SageMath llamado Máquina de Faulhaber-Narayana, que implementa un framework combinatorio para predecir coeficientes en sumas de potencias impares $p>7$ mediante la expresión $\varepsilon(p)$, y propone un proyecto colaborativo en fases donde los estudiantes alternan entre cómputo simbólico y razonamiento clásico con lápiz y calculadora.

El cuarto texto aborda la criptografía desde el estudio de $\varepsilon(p)$, mostrando cómo su "descifrado" (cálculo manual de coeficientes de secuencias) es computacionalmente viable pero humanamente complejo, ilustrando así los fundamentos de sistemas criptográficos. Se incluye una actividad lúdica (Secuencias cruzadas) con ventajas asimétricas de información. En conjunto, los cuatro textos conforman una propuesta coherente que transita desde la aritmética de patrones hasta la computación simbólica y la criptografía, utilizando narrativas inmersivas y software libre para fomentar el pensamiento estructurado, la formulación de conjeturas y la reflexión ética en matemáticas.

COMENTARIOS DEL AUTOR

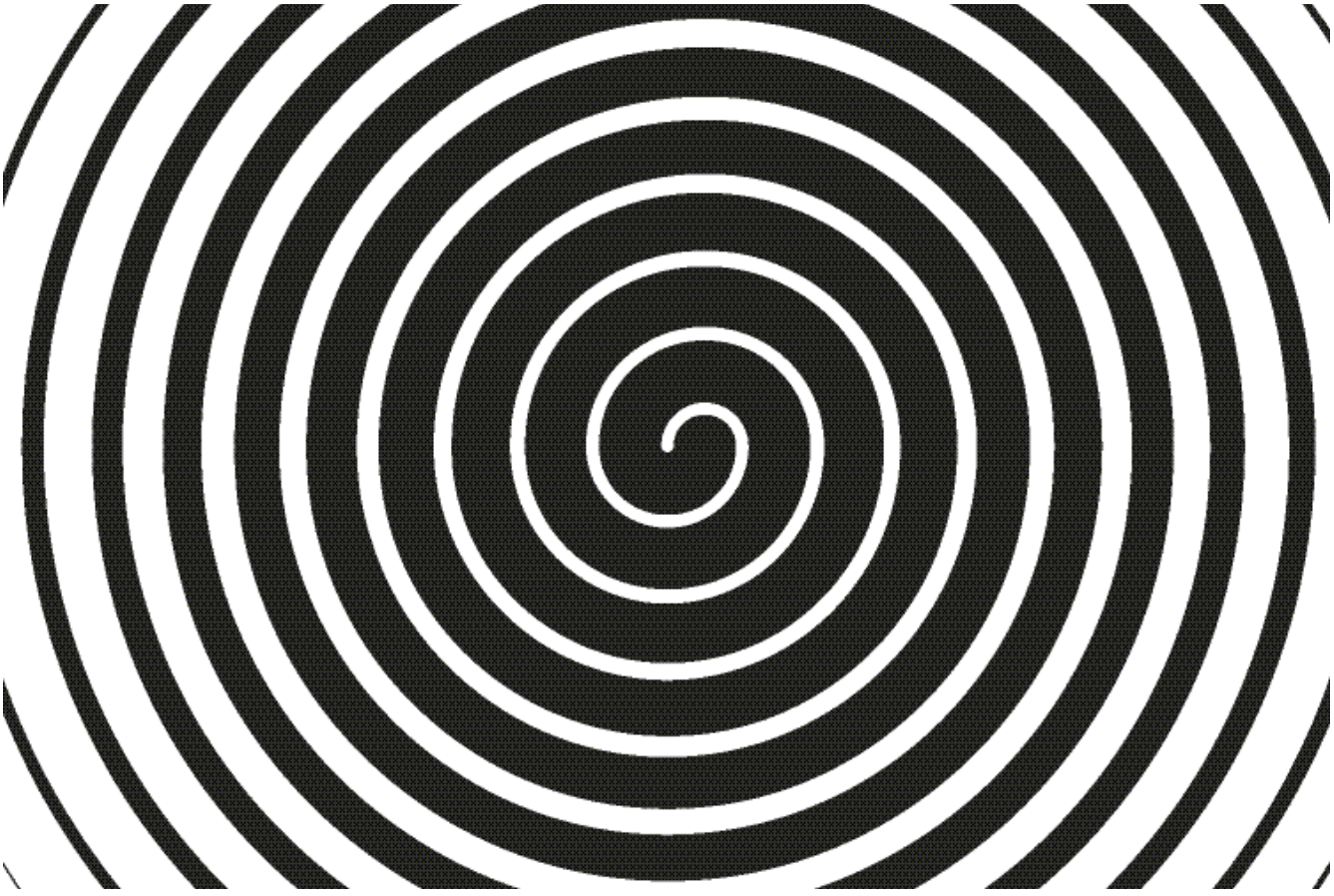
Estos comentarios están dirigidos a profesores, padres de familia o cualquier otra persona que desee usar este material. Se recomienda, primero, comprender el funcionamiento de las secuencias en relación con el problema de la suma de potencias para exponentes altos, utilizando el Método Directo. Es posible que esto no lo haya explicado completamente en los textos pedagógicos; estos pueden apoyarse en mis textos puramente matemáticos. Una vez cubierta esta parte, se puede continuar sin problema con un aprendizaje acumulativo e inmersivo, introduciendo al alumno en el mundo de los números. Como comentario final, se invita a cuestionar el material y a sentirse libres de intervenir en mi secuencia didáctica (tal como yo impartiría la clase) según sus propios criterios.

(consultar mis demás textos)
Internet Archive

El Mundo De Los Números:
Una Propuesta Pedagógica

Yasser A. Chavez

Resumen. Este texto pedagógico explora una aproximación experimental y narrativa a la enseñanza de las matemáticas en el contexto escolar, articulando secuencias numéricas con elementos poéticos, fantásticos y simbólicos.



Introducción

La existencia de este texto responde a dos objetivos. El primero es ofrecer una clase de matemáticas con un enfoque humanista, en el que no solo se desarrollen las habilidades propias de esta ciencia, sino que también se integren elementos de otras disciplinas como la literatura, la psicología y la filosofía.

Aunque la mayoría de las personas no estén formalmente tituladas en estas áreas, es innegable que todo ser humano, a lo largo de su vida, construye una forma personal de entender y vivir estas disciplinas, nacida más de la experiencia que del estudio académico. Por eso, en este texto propongo una aproximación interdisciplinaria: de la literatura, incorporo la narrativa como herramienta pedagógica; de la psicología, el reconocimiento y tratamiento de emociones como la frustración; y de la filosofía, aunque menos evidente, una reflexión constante que impregna todo el texto.

Mi intención es acercar los números a cualquier persona de una manera más pura y esencial, a través del lente de la teoría de números. Vivimos en un mundo donde el número ha perdido su alma, reducido muchas veces a cifras impersonales que habitan el comercio, las redes sociales y la estadística. Aunque este tema me sobrepasa, considero importante que todo ser humano, antes de morir, tenga la oportunidad de reencontrarse con el número en su dimensión más humana, bella y significativa, como la que intentaré presentar a lo largo de este trabajo.

El segundo objetivo consiste en presentar el texto matemático titulado *Sumas de Potencias de Números Naturales Mediante Secuencias Combinatorias* que constituye una continuación lógica y necesaria dentro del enfoque propuesto.

Estructura

Narrativa: Esta sección tiene como objetivo introducir al alumno de forma gradual en cada capítulo y establecer una conexión entre ellos, de modo que las seis narrativas se integren en una historia coherente y significativa, en armonía con los contenidos matemáticos presentados.

Ruta 1: Esta sección tiene como objetivo estimular el aspecto más lúdico de las matemáticas, favoreciendo el descubrimiento intuitivo de secuencias antes de abordar un enfoque más estructurado.

Ruta 2: Esta sección tiene como objetivo presentar el aspecto más estructurado, abstracto y riguroso del texto, enfocándose exclusivamente en las cinco primeras sumas de potencias.

Análisis: Esta sección está destinada a analizar el contenido del capítulo, subrayando los aspectos más relevantes y significativos.

Capítulo 0: El Origen

Narrativa:

En el mundo primitivo de los números, tras una total tranquilidad, hace 13,800 millones de años, emergió el número uno. En su forma mas primitiva, este numero carecía de conciencia y definición, pero era solo cuestión de tiempo para que evolucionara hacia una forma más abstracta.

Pasaron miles de años antes de que el numero uno cambiara no solo su apariencia, sino también su esencia. Al cobrar conciencia, comenzó a preguntarse que era aquel lugar de apariencia vacía. Intrigado, decidió explorar ese mundo desconocido. Sin embargo, después de años de búsqueda, no encontró más que vacío y desolación, lo que provocó una profunda tristeza. Pero entonces ocurrió lo impensable. ¿Otro numero uno? No, algo aún más sorprendente: infinitos números unos, en sus formas mas primitivas, comenzaron a emerger por todo el espacio.

Al presenciar este evento extraordinario, el numero primigenio quedo asombrado, pero también lleno de preguntas: ¿Que los hizo aparecer de la nada? ¿Por que se ven diferentes a mi? ¿Cual es su propósito? Estas y muchas otras dudas invadieron su mente.

Ruta 1:

1, 1, 1, 1, 1, ..., 1, 1	(1)
1, 2, 2, 2, 2, ..., 2, 2	(2)
0, 2, 2, 2, 2, ..., 2, 2	(3)

Análisis:

El capítulo 0 introduce el concepto de secuencia numérica, que por definición es una lista de números que siguen una regla o patrón, y se presentan las primeras tres secuencias que podemos considerar fundamentales, dado que (1) es un caso particular del triángulo de Pascal, (2) es un caso particular del triángulo impar, y (3) rompe con la idea de que cualquier secuencia que no sea de origen artificial debe iniciar con el 1. Esto se debe a que se trata de una subsecuencia de los números naturales, y con ello se establece que toda subsecuencia de índice par inicia en 0. Aunque el enésimo término de una suma parcial se compone de todos los términos anteriores, el 1 pertenece exclusivamente a la subsecuencia de índices impares, por lo que se le puede considerar el punto de partida; el 0, en cambio, puede estar presente en ambas subsecuencias. Por lo tanto, este capítulo es meramente conceptual y desarrolla el sentido numérico con un fuerte enfoque en las secuencias numéricas.

Secuencias Combinatorias

En el desarrollo de este texto trabajaremos con tres secuencias combinatorias: los coeficientes binomiales, una variante de estos (2), y los números de Narayana. La construcción de las dos primeras secuencias es muy didáctica, y existe abundante material disponible en YouTube, artículos pedagógicos, libros de texto, etc.

Se recomienda introducir las dos primeras secuencias utilizando el procedimiento empleado para generar cada número en el triángulo de Pascal, donde denotaremos el coeficiente binomial como C(n, k), y su variante —la suma consecutiva de dos coeficientes binomiales— como S(n, k) = C(n-1, k) + C(n, k), donde $0 \leq k \leq n$.

Tabla-C(n, k)

C(n, 0)	C(n, 1)	C(n+1, 2)	C(n+2, 3)	C(n+3, 4)	C(n+4, 5)	C(n+5, 6)	C(n+6, 7)	C(n+7, 8)	C(n+8, 9)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

Tabla-S(n, k)

S(n, 0)	S(n, 1)	S(n+1, 2)	S(n+2, 3)	S(n+3, 4)	S(n+4, 5)	S(n+5, 6)	S(n+6, 7)	S(n+7, 8)	S(n+8, 9)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	5	9	14	20	27	35	44	54	65
2	7	16	30	50	77	112	156	210	275
2	9	25	55	105	182	294	450	660	935
2	11	36	91	196	378	672	1122	1782	2717
2	13	49	140	336	714	1386	2508	4290	7007
2	15	64	204	540	1254	2640	5148	9438	16445
2	17	81	285	825	2079	4719	9867	19305	35750
2	19	100	385	1210	3289	8008	17875	37180	72930

Capítulo 1: La Llave Dorada

Narrativa:

El número uno se percató de la existencia del mundo donde habitan los humanos: el planeta Tierra. Este evento ocurrió hace aproximadamente 22,000 años. Por un momento, el número uno pudo observar aquel mundo tan primitivo, pero ordenado, algo que contrastaba con el suyo, aunque con un entendimiento de la matemática muy inferior. Por ello, decidió convertirse en el puente que conectara ambos mundos: una alianza que se beneficiaría del orden de los humanos y de la tecnología que les proveerían los números. Así que escondió una llave que abre la puerta que resguarda el mundo de los números, donde se atesoran los más grandes enigmas de las matemáticas.

Ruta 2:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ (n-1),\ n \qquad (4)$$

Antes de la transición a la generalidad, es importante partir de lo particular y plantear el problema de sumar los primeros 100 términos de la secuencia (4), sin "contaminar" al estudiante (es decir, sin aun utilizar conceptos del Capítulo 0) con enfoques que podrían anticipar o facilitar la solución. Por ello, se propone dar al alumno cinco minutos para desarrollar sus propios procedimientos —correctos o no—, ya que lo verdaderamente valioso es el choque entre dos formas de razonamiento: ver los números como cifras aisladas o como familias numéricas (secuencias).

La solución más comúnmente establecida —emparejar cada número con su extremo (n+1) y multiplicar por el número de parejas (n/2)— servirá como transición hacia el enfoque que desarrollaremos a lo largo del texto.

«Razonamiento»

Extraer las dos subsecuencias de (4) para n = 100:

$$1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ \ldots,\ 99,\ 0$$

$$0,\ 2,\ 0,\ 4,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 100$$

El patrón de los números impares ($1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$) es el que vamos a explotar, dado que los alumnos tienen una familiaridad inmediata con los números cuadrados (que aparecen en las tablas de multiplicar o en diversas actividades lúdicas), a diferencia de los números triangulares (1,3,6,10,15,…).

Descomponer la secuencia de números pares:

$$0,\ 1,\ 0,\ 3,\ 0,\ ...,\ 0,\ 99$$

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ ...,\ 0,\ 1$$

Encontrar la sumatoria de las tres secuencias resultantes no debería ser difícil. Cabe recalcar la importancia de notar que las tres secuencias están intercaladas entre ceros, por lo que el desarrollo es el siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n/2} 2k-1 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}, \qquad \sum_{k=1}^{n/2} 1 = \frac{n}{2}$$

Por lo tanto, la sumatoria de (4) es igual a:

$$2\cdot\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = C(n+1,\ 2) \quad (4.1)$$

La respuesta del caso particular para n = 100 es 5050, lo cual equivale a 2·50^2 + 50. A partir de este resultado, se busca una generalización con ayuda de un álgebra muy básica, limitada únicamente a manipulaciones elementales. Desde este punto, no volveremos a recurrir al álgebra tradicional, sino que pasaremos a un tipo de álgebra simbólica, en la que la mayor parte del trabajo operativo se traslada al dominio de la aritmética. Prescindiremos del uso de variables y operaremos directamente sobre los términos de las secuencias, siguiendo la estructura de las sumatorias —concretamente, la de las sumas de potencias de los primeros números naturales.

La sumatoria se desarrolla en dos sentidos. El primero, por ejemplo: en $\sum k^2$, tenemos una sumatoria de cuadrados, donde primero se multiplicó y luego se sumó. Para deshacer esta operación, simplemente aplicamos las operaciones inversas: la resta y la división, respectivamente. De este modo, abordaremos la mayoría de las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división y potenciación.

Ruta 1:

$$1,\ 6,\ 15,\ 28,\ ...,\ C(2n,\ 2) \quad (5)$$

$$0,\ 3,\ 10,\ 21,\ ...,\ C(2n-1,\ 2) \quad (6)$$

Antes de que el alumno descubra o profundice en el triángulo de pascal es de gran importancia que descubra de forma orgánica los números tetraédricos (1,4,10,20,35,…) antes de llegar a la sumatoria de números cuadrados para aligerar la carga de toda la vasta información que proporciona el triángulo y no se convierta en una especie de tabla de multiplicación que recae en la memorización sin un sentido inmediato lo cual puede provocar que el alumno pierda interés. Por lo que las secuencias (5) y (6) tienen cierta creatividad dentro de lo permitido por ejemplo algún alumno puede proponer la secuencia (1,3,4,6,9,10,16,15,…) que consta de los números cuadrados intercalados con los números triangulares si bien los números tetraédricos hacen presencia en las dos secuencias seria mas difícil de ver que en las las secuencias (5) y (6) dado que la secuencia intercalada tiene mas ruido (múltiples secuencias combinadas).

«Razonamiento»

Realizaremos las operaciones de suma y resta entre (5) y (6):

$1 + 0 = 1$ $6 + 3 = 9$ $15 + 10 = 25$ $28 + 21 = 49$ $45 + 36 = 81$ . . . $C(2n,\ 2) + C(2n-1,\ 2) = (2n-1)^2$	$1 - 0 = 1$ $6 - 3 = 3$ $15 - 10 = 5$ $28 - 21 = 7$ $45 - 36 = 9$ . . . $C(2n,\ 2) - C(2n-1,\ 2) = 2n-1$

En el caso de la suma, podemos observar que el resultado consiste en los números impares elevados al cuadrado. Por otro lado, en la resta, los números impares siguen un patrón familiar. El nuevo patrón se encuentra en la suma de los números impares elevados al cuadrado, lo que da como resultado C(2n+1, 3). Los primeros cinco números son: 1, 10, 35, 84, 165, entre otros.

Al combinar ambas operaciones y sustituir una secuencia, podemos derivar las siguientes dos fórmulas:

$$\sum_{k=1}^{n} C(2k,\ 2) = \frac{C(2n+1,\ 3) + S(n+1,\ 2)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} C(2k-1,\ 2) = \frac{C(2n+1,\ 3) - S(n+1,\ 2)}{2}$$

Análisis:

El capítulo 1 representa un punto de inflexión en el aprendizaje de los alumnos, ya que abandonan los métodos tradicionales y adoptan un enfoque centrado en las secuencias. En este contexto, se introducen las dos primeras familias de secuencias: la primera (1), que genera el triángulo de Pascal, y la segunda (2), que también forma un triángulo cuya estructura se desarrollará con mayor claridad en el capítulo 2.

El triángulo de Pascal, debido a su sencilla construcción, cuenta con una amplia variedad de recursos didácticos, lo que también favorece la enseñanza del segundo triángulo.

Capítulo 2: La Espiral

Narrativa:

En el mundo de los números, suelen existir espirales en las que es fácil entrar pero difícil salir. Solo aquellos que no tengan miedo de sumergirse en lo más profundo podrán descubrir los patrones ocultos que subyacen en ellas. Así podrán descifrar una y cada una de las infinitas espirales que esperan ser descubiertas.

Números Cuadrados

Los números cuadrados son fundamentales para este enfoque, en el que se fomenta la memorización de los primeros 50. Se recomienda apoyarse en la tabla para una identificación rápida de las secuencias. La importancia de estos números se mantiene hasta P = 13, donde P representa el exponente en las sumas de potencias.

Tabla-Cuadrados

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$	$41^2 = 1681$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$	$42^2 = 1764$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$	$43^2 = 1849$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$	$44^2 = 1936$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$	$45^2 = 2025$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$	$46^2 = 2116$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$	$47^2 = 2209$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$	$48^2 = 2304$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$	$49^2 = 2401$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$	$50^2 = 2500$

Ruta 1:

$$8 \cdot C(2n+1,\ 3) + 2n = C(4n+1,\ 3) \tag{7}$$

$$C(2n+2,\ 4) - 4 \cdot S(n+2,\ 4) = \sum_{k=1}^{n} C(2k+1,\ 3) \tag{8}$$

Las fórmulas (7) y (8) fueron publicadas por el autor en la OEIS (Enciclopedia Electrónica de Secuencias de Enteros); pueden consultarse en las referencias [1] y [2].

Las dos nuevas relaciones, cada una compuesta por tres secuencias, cuyo objetivo es calcular C(4n+1, 3) y ∑C(2k+1, 3). En cada caso, se revelará una de las dos secuencias del lado izquierdo, lo que permitirá al alumno descubrir por sí mismo la secuencia faltante, ya sea identificando una regla de divisibilidad evidente o aplicando alguna operación sencilla, como una suma o una resta

Ruta 2:

$$\boxed{1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \ldots,\ (n-1)^2,\ n^2} \quad (9)$$

«Razonamiento»

La solución a este problema consiste en enfocar la atención en los números impares, ya que su suma produce el enésimo número cuadrado. A partir de esto, podemos reescribir la expresión (2n−1) como (n + (n−1)), lo cual nos conduce naturalmente a la definición de S(n, k). Es en este punto donde el alumno comprende esta conexión y está preparado para explorar las secuencias S(n, k). No obstante, ya desde la Ruta 1 se anticipa la aparición de los números tetraédricos y S(n+2, 4).

Por lo tanto, la sumatoria de (9) es igual a:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = C(n+1,\ 3) + C(n+2,\ 3) = S(n+2,\ 3)} \quad (9.1)$$

Análisis:

El capítulo 2 es una extensión del capítulo 1, en la que no se presenta ningún desafío adicional, salvo que el alumno ya debe estar explorando las primeras secuencias S(n, k) y comenzando a concebirlas como una familia de secuencias. Este proceso no debe basarse en la memorización forzada, sino desarrollarse de forma orgánica conforme el alumno avance por la Ruta 1.

Se recomienda introducir la tabla de números cuadrados hasta el final del capítulo, una vez que el alumno haya identificado el patrón $\Delta n^2 = 2n - 1$. Aunque en este punto aún no esté plenamente justificada la memorización de los números cuadrados, esta se verá reforzada en los capítulos 3 y 4 — particularmente con $\Sigma k^3 = C(n+1, 2)^2$, (11.1) y (11.2)—, logrando que la memorización de la tabla sea un proceso orgánico y no un obstáculo para la enseñanza del enfoque. De esta forma, se evita que el alumno pierda interés al sentir que debe memorizar algo únicamente por el hecho de memorizar.

Capítulo 3: La Conferencia

Narrativa:

Del otro lado de aquella espiral nos esperaban unos números que se veían familiares pero tenían como un sombrero en la cabeza, como si de un cumpleaños se tratase. Nos guiaron hacia una conferencia que iba a dar el número dos sobre números primos que son pares y sin darnos cuenta ya éramos uno más con los números.

Ruta 2:

Al igual que en el capítulo 1, es probable que el alumno se sienta tentado a utilizar la solución directa $\sum k^3 = C(n+1, 2)^2$. Sin embargo, este capítulo se encarga de eliminar por completo las soluciones triviales, ya que solo generan una falsa sensación de avance en la resolución del problema. No obstante, no se descarta que el alumno identifique el patrón relacionado con los números triangulares y su conexión con la suma de cubos.

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ \ldots,\ (n-1)^3,\ n^3 \quad (10)$$

«Razonamiento»

Partiendo de la ecuación $\sum k^3 = C(n+1, 2)^2$, restaremos $C(n+1, 2)$:

$C(n+1, 2)^2 - C(n+1, 2)$	/6
$1 - 1 = 0$	0
$9 - 3 = 6$	1
$36 - 6 = 30$	5
$100 - 10 = 90$	15
$225 - 15 = 210$	35

Por lo tanto, la sumatoria de (10) es igual a:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 6 \cdot C(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2) \quad (10.1)$$

El razonamiento anterior es el menos directo de entender, pero se fundamenta en la estructura impar-impar-par-par-impar-impar… que siguen las secuencias provenientes de la suma de potencias. Esto se deduce fácilmente, dado que un número impar elevado a cualquier exponente sigue siendo impar, y de igual forma ocurre con un número par. Aunque no se trate de una demostración rigurosa de (10.1), este razonamiento facilita el desarrollo del enfoque.

Capítulo 4: El Valle De Los Espejos

Narrativa:

En un lugar misterioso en el mundo de los números, en un valle lejano, están colocados unos espejos donde los números pueden ir a reflejarse, como una de esas atracciones de circo donde uno se puede ver múltiples veces. Parece ser que es una zona donde los números pueden ir a divertirse con sus reflejos, pero hay algo más profundo que esto.

Ruta 1:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} C(2\mathrm{k},\ 2)\right)^2 + S(n{+}2,\ 4) = N(2\mathrm{n}{+}2,\ 4) \quad (11.1)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} C(2k{+}1,\ 2)\right)^2 + S(n{+}3,\ 4) = N(2n{+}3,\ 4) \quad (11.2)$$

Tabla-Numérica

$1^2 + 0 = 1$
$3^2 + 1 = 10$
$7^2 + 1 = 50$
$13^2 + 6 = 175$
$22^2 + 6 = 490$
$34^2 + 20 = 1176$

El alumno reconoce las dos secuencias en el lado izquierdo de las ecuaciones (11.1) y (11.2). Aunque se presentan por separado, deben entenderse de forma combinada, como puede observarse en la tabla. El propósito de esta compleja relación es que el alumno entre en contacto con una matemática de naturaleza más caótica, donde no es evidente por qué (11.1) y (11.2) convergen en los números de Narayana. Sin embargo, incluso en medio de este aparente caos, los estudiantes podrán reconocer que lo aprendido está conectado y forma una especie de red, donde cada nodo representa una relación. Esto da un sentido más profundo al aprendizaje, que va más allá de resolver por resolver o memorizar por memorizar.

Ruta 2:

Es la primera vez que el alumno entrará en contacto con la verdadera esencia de la Ruta 2, la cual se fundamenta en la metodología de mi texto *Sumas de Potencias de Números Naturales Mediante Secuencias Combinatorias* (véanse las páginas 6 y 7 en la referencia [3]). En resumen, se trata de comprender la naturaleza del problema —una sumatoria— en la que intervienen operaciones como la diferencia, la multiplicación y la suma.

$$1^4,\ 2^4,\ 3^4,\ 4^4,\ \ldots,\ (n-1)^4,\ n^4 \quad (12)$$

«Razonamiento»

Partiendo de la ecuación (10.1), aplicaremos el (M.D) a ambas secuencias:

ΔC(n+2, 4)·n	ΔC(n+1, 2)·n
0·1 = 0	1·1 = 1
1·2 = 2	2·2 = 4
4·3 = 12	3·3 = 9
10·4 = 40	4·4 = 16
20·5 = 100	5·5 = 25

Notamos una divisibilidad entre 2 en el lado izquierdo de la tabla, lo que da como resultado S(n+2, 4). En el lado derecho, tenemos n^2 = S(n+1, 2). Si aplicamos el siguiente paso, que consiste en realizar las sumatorias, obtenemos como resultado S(n+3, 5) y S(n+2, 3).

Por lo tanto, la sumatoria de (12) es igual a:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 12 \cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3) \quad (12.1)$$

Análisis:

El capítulo 4 refuerza la comprensión de los conceptos de sumatoria y suma parcial, dejando en claro que el contexto se centra en sumas finitas. En esta etapa, el alumno podrá operar con mayor soltura sobre las secuencias, ya que, al analizar expresiones como C(n, k) y S(n, k), se observa que no son más que sumas encadenadas: la suma de la suma de la suma. Cuando identifiquemos una secuencia conocida y queramos realizar operaciones como ∑S(n+3, 4) notaremos que se trata simplemente de un aumento en el valor de k, sin dejar de considerar el ajuste correspondiente en n.

Capítulo 5: El Carnaval

Narrativa:

En el mundo primitivo de los números, el uno se dio a la tarea de conectar con espirales los distintos lugares donde vivían los demás números. En uno de estos lugares se encuentra el carnaval numérico, que se celebra cada año y donde se pueden ver secuencias de lo más interesante.

Ruta 1:

$$C(n+2,\ 3)\cdot C(n+3,\ 3)\ =\ 4\cdot N(n+3,\ 4) \qquad (13)$$

La forma natural de descubrir los números de Narayana es a partir de multiplicar los números tetraédricos, como se detalla en (13). Sin embargo, gracias a que el alumno ya los anticipó en (11.1) y (11.2), se crea un efecto de familiaridad y curiosidad por esta secuencia, que aparece en dos ocasiones vinculada a secuencias ya conocidas.

Presentar esta familia de secuencias al alumno lo dejaré a criterio del lector, dado que este es el último capítulo del texto y el único en el que aparece la secuencia N(n+3, 4), y por ende, la última suma de potencias. Los números de Narayana surgirán en sumas posteriores.

Ruta 2:

$$1^5,\ 2^5,\ 3^5,\ 4^5,\ \ldots,\ (n-1)^5,\ n^5 \qquad (14)$$

«Razonamiento»

Partiendo de la ecuación (12.1), aplicamos el (M.D) a ambas secuencias:

$\Delta S(n+3, 5)\cdot n$	$\Delta S(n+2, 3)\cdot n$
$0\cdot 1 = 0$	$1\cdot 1 = 1$
$1\cdot 2 = 2$	$4\cdot 2 = 8$
$6\cdot 3 = 18$	$9\cdot 3 = 27$
$20\cdot 4 = 80$	$16\cdot 4 = 64$
$50\cdot 5 = 250$	$25\cdot 5 = 125$

En el lado derecho de la tabla se obtiene n^3, cuya sumatoria es igual a $C(n+1, 2)^2$. En el lado izquierdo, se observa una divisibilidad entre 2 que da lugar a $\Delta N(n+2, 4)$; por lo tanto, su sumatoria es igual a $N(n+2, 4)$, ya que la sumatoria es la operación inversa de la diferencia finita (diferencia entre dos términos consecutivos).

Por lo tanto, la sumatoria de (14) es igual a:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^5 = 24 \cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2} \quad (14.1)$$

Las fórmula (14.1) fue publicada por el autor en la OEIS (Enciclopedia Electrónica de Secuencias de Enteros); puede consultar la referencia [4].

Análisis:

El capítulo 5 —concretamente la suma de quintas potencias— es donde el enfoque toma forma y se distingue de otros métodos. A diferencia de enfoques que expresan las sumas de potencias utilizando únicamente las secuencias S(n, k) o C(n, k), o del método de Faulhaber, que usa exclusivamente C(n, k) con exponentes añadidos, nuestro enfoque se basa en el uso combinado de las tres secuencias: C(n, k), S(n, k) y N(n, k).

Podemos notar dos aspectos importantes en la Ruta 2. El primero es la existencia de un ciclo entre las secuencias $C(n+1, 2)^2$ y $S(n+2, 3)$, donde una conduce a la otra. Por lo tanto, las fórmulas deben contener necesariamente alguna de estas dos secuencias, que mantienen la estructura impar–impar–par–par, y así sucesivamente.

El segundo aspecto es la necesidad de tener cuidado al detectar alguna divisibilidad, ya que esta se traduce en una multiplicación que afecta a los coeficientes que arrastran las secuencias anteriores.

Notas Del Autor:

En esta sección compartiré ideas relacionadas con el enfoque, tanto desde una perspectiva más matemática como desde otras que trascienden lo que comúnmente se busca en las escuelas. También narraré brevemente cómo nació este enfoque, ya que solo así puede comprenderse el misticismo que atribuyo a los números y la visión que tengo sobre el propósito de este texto.

El lector ya se habrá dado cuenta de que este enfoque, en esencia, se basa en una aritmética muy vaga: se hace lo mínimo y se espera recibir una respuesta que dé por terminado el problema. Lo que nos lleva a plantear la siguiente pregunta: ¿dónde paga el alumno esta vagueza? La respuesta es sencilla: el alumno se hace más consciente del problema.

Capítulo 1: Al abandonar un razonamiento bello —como el de Gauss—, ya que este enfoque culmina en un álgebra que resulta poco útil para nuestros fines.

Capítulo 2: La definición de S(n, k) desarrolla por sí misma la noción de sumatoria y, con ello se explota el patrón impar ($\Delta n^2 = 2n-1$).

Capítulo 3: Se hace consciente de la estructura impar-impar-par-par de las sumas de potencias.

Capítulo 4: La naturaleza del problema se ve reflejada en el método directo.

Capítulo 5: El método directo se refina en el plano operativo.

En comparación con el enfoque tradicional —las “sumas telescópicas”—, un enfoque vago sin más, puedo parecer que desprecio el álgebra en todo el texto. La verdad es que no. Aunque reprobé matemáticas en el primer semestre en el CONALEP, desde un inicio mi enfoque fue puramente algebraico al tratar de abordar el problema de las sumas de potencias. En el proceso, creé fórmulas de las más raras, que aún conservo en mis libretas. Pero, por efectos prácticos y pedagógicos, encuentro mejor este enfoque. No obstante, si uno verdaderamente quiere profundizar en el problema, tiene que ver forzosamente a Jakob Bernoulli, donde encontrará más álgebra de la que hay aquí.

Dejando a un lado lo matemático, hay una sensación que no puedo describir, pero es algo parecido a lo que sienten las personas afines a la numerología con los números. Ocurre al aplicar el método directo a las secuencias y comenzar a ver secuencias que nos resultan familiares. Dado que primero vemos un término y luego el siguiente, hay un suspenso: ¿será la secuencia en la que estás pensando? Y cuando tienes suficientes términos para estar seguro, eso provoca una sonrisa. Mientras más se resistan a revelarse, mayor es el goce. Es posible que esa misma sonrisa aparezca otra vez en lo cotidiano, porque estamos rodeados de números.

Para terminar, no pretendo que se siga al pie de la letra todo mi texto; puede adaptarse tanto como el lector lo considere conveniente, pero siempre procurando que el alumno descubra esa sensación indescriptible de la que hablo.

Agradecimientos. Este texto no podría haber sido escrito sin la ayuda de mi abuela María Esther.

Referencias

[1] OEIS Foundation Inc. (2025), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, https://oeis.org/A267031.
[2] OEIS Foundation Inc. (2025), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, https://oeis.org/A006324.
[3] Chavez, Yasser A. (2025). Sums of Powers of Natural Numbers via Combinatorial Sequences. figshare. Dataset. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.29804282.v14
[4] OEIS Foundation Inc. (2025), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, https://oeis.org/A000539.

Palabras clave: Educación matemática , Pedagogía, Secuencias Numéricas.

Contacto: math.yasserarath@gmail.com

Sophie y el valle encantado:
Una propuesta pedagógica.

Yasser A. Chavez

Resumen. Este texto presenta una propuesta pedagógica para el reforzamiento de operaciones aritméticas con signos alternados, dirigida a estudiantes que ya han trabajado con secuencias numéricas. A través de una narrativa fantástica protagonizada por Sophie —en homenaje a la matemática Sophie Germain— y su acompañante Boole, se introduce al alumno en el "Valle de los Espejos", donde los números revelan patrones y propiedades mediante sumas alternadas. Se abordan cuatro problemas de complejidad creciente (p = 1, 2, 3, 4), utilizando dos rutas metodológicas: un enfoque lúdico para el problema más complejo y un abordaje más estructurado para los restantes. Como herramienta didáctica complementaria, se propone la elaboración de un "diario del explorador", donde el estudiante registre fórmulas, identidades y descubrimientos, favoreciendo así la inmersión y la reflexión personal en el aprendizaje matemático.

La pequeña Sophie:

En el mundo de los números habita una niña llamada Sophie, que pocas veces se deja ver durante el día; pero si escuchas cantar a una cigarra, es porque no tardará en llegar.

Ella es la primera a quien le gusta apreciar el espectáculo de ver al sauce emerger en el horizonte, ya que viene desde muy lejos, de una de las grutas más profundas que existen en este mundo.

Si alguien desea ir, procure llevar una vela si no quiere perderse en el camino. Pero si estás decidido a entrar, de poca ayuda le será, por lo que no está de más pedirle a esa niña algún consejo, pues Sophie conoce bien ese lugar.

Más de una vez se le han revelado verdades que, muy contenta, corre a contarle al profesor Diofanto. Él no duda en anotarlas en su libro, que parece siempre tener espacio para un descubrimiento más.

1 Introducción

Este texto es una continuación del texto, *El Mundo De Los Números: Una Propuesta Pedagógica*. Por ello, se recomienda haber trabajado todos los capítulos, para que el alumno esté familiarizado con las secuencias.

Se mantendrán las dos rutas y sus enfoques, presentándose cuatro problemas a resolver: los primeros tres mediante la Ruta 2 (R2), y el último mediante la Ruta 1 (R1). De este modo, el problema más difícil se abordará con un enfoque lúdico.

El objetivo del texto es reforzar los conocimientos previos, centrándonos en sumas con signos alternados; por ejemplo: $10 - 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1 = 5$.

En este tipo de operaciones es posible observar patrones desde el inicio, característica que las diferencia de las sumas convencionales, sin perder de vista la complejidad inherente al problema, ya que a mayor exponente, más difícil resulta identificar algún patrón.

La estructura del texto consistirá en presentar las primeras cuatro sumas, acompañadas de una narrativa introductoria común para todas, dado que no requieren mayor motivación: el alumno ya conoce las secuencias y los métodos.

En cuanto al personaje de Sophie, se trata de una bienvenida a este mundo fantástico, haciendo alusión a la matemática Sophie Germain (1776-1831), con el fin de invitar a niñas y jóvenes a adentrarse en el mundo de las ciencias, una problemática histórica que, no obstante, no se abordará en el texto por exceder el alcance de esta propuesta.

El valle encantado:

A medida que iba amaneciendo, los números se dirigían al Valle de los Espejos. Detrás de ellos iban Sophie y Boole, dispuestos a descifrar el misterio que hacía posible que los números se reflejaran en los espejos.

Aquellos espejos estaban hechos de un material similar a las burbujas de jabón.

—Mira —dijo Sophie, señalando un espejo—, cómo se refleja ese número cinco.

—Necesitamos acercarnos más —dijo Boole mientras se colocaba un sombrero decorado con trozos de madera y pasto.

Sophie y Boole se adentraron en aquel valle, escondiéndose entre el pasto que los cubría.

—Si pudiera reflejar cosas —dijo Sophie mientras cerraba los ojos y pensaba—, no dudaría en reflejar un pay de manzana —añadió, mirando a lo lejos la panadería de los Pitagóricos.

—Pues yo —dijo Boole— me reflejaría a mí mismo, así terminaría más rápido mis inventos. Pero no sé si funcione con personas.

—Lo sabremos muy pronto —respondió Sophie.

Sophie y Boole habían llegado lo suficientemente cerca de los espejos.

—Tengo una idea —dijo Boole mientras sacaba su bolso—. Aquí está mi artefacto capaz de recopilar información de cualquier cosa —añadió, mostrando un palo de metal con hoyuelos, algunos rellenados con ámbar y algún mineral raro.

—¿Qué planeas? —dijo Sophie, confundida por tal artefacto.

—Ya verás —respondió Boole, mientras lanzaba su artefacto hacia uno de los espejos.

El artefacto impactó en el espejo, haciendo que este adquiriera un color parecido al ámbar.

—Mira —dijo Sophie, señalando al espejo—, cambió de color.

—¡Lo he conseguido! —exclamó Boole, lleno de felicidad—. Iré por mi artefacto.

Un número se fue a reflejar en aquel espejo de color ámbar, pero esta vez, del otro lado del espejo estaba su opuesto: un número negativo.

—Qué raro —pensó Sophie—, no parecen números normales.

Aquellos números misteriosos se fusionaron con los números normales, creando nuevas sumas.

1.1 El diario del explorador

La narrativa tiene un límite, y no siempre es posible encontrar una forma ingeniosa de mantener la coherencia con el contenido matemático. Una solución didáctica para ello es que el alumno lleve un diario de fórmulas e identidades, dando así continuidad al primer texto [1] y logrando una mayor inmersión en el mundo propuesto. De esta forma, se mantiene viva la narrativa a través de una herramienta personal y reflexiva.

Para la construcción de este diario, se pueden utilizar cinco hojas blancas, las cuales se recortan por la mitad para luego unirlas como un libro. De esta forma, se obtendrán veinte páginas, más que suficientes para el trabajo.

La portada puede incluir un dibujo relacionado con el mundo fantástico, ya sea el valle de los espejos o algún otro lugar numérico. Se recomienda que cada texto o capítulo tenga un dibujo representativo que funcione como separador. Como propuesta final, se podría invitar al alumno a diseñar un nuevo lugar.

1.1.1 Formato de las entradas del diario

Se recomienda seguir el mismo formato que la OEIS para las entradas, donde se añade la fecha y hora en que se descubre una fórmula, junto con un identificador (Axxxxxx).

Si bien en el aula las actividades se realizan en grupo y no hay un solo nombre al que adjudicarle dicha fórmula, se pueden plantear problemas durante todo el ciclo escolar. De esta manera, cualquier alumno puede reclamar su autoría.

Formato

F001 Σk^2

S(n+2, 3) . - _Grupo A_, Feb 23 2024

2 Sumas con signos alternados

2.1 P = 1 [R2]

Para referirnos a la primera suma y a las posteriores, usaremos la letra S con un subíndice. Esto nos permitirá mayor precisión al referirnos a una en específico.

$$S_p(n) = |\ 1^p - 2^p + 3^p - \ldots + (n-1)^p - n^p\ |$$

Notemos que la suma está envuelta por un valor absoluto. Esto se debe a lo que comúnmente se conoce como “elegancia matemática”. Si bien las sumas se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 2 - 1 &= 1, \\ 3 - 2 + 1 &= 2, \\ 4 - 3 + 2 - 1 &= 2, \\ 5 - 4 + 3 - 2 + 1 &= 3. \end{aligned}$$

Podemos observar que los números cambian de signo en cada fila. Esto sugiere el uso de un factor como (-1) para reescribir la suma de forma compacta. Sin embargo, este enfoque generaría términos negativos. Por ello, utilizamos el valor absoluto para unificar el cálculo de la suma, tanto para una cantidad par o impar de términos.

«Razonamiento»

El patrón clave a notar es la diferencia entre dos números naturales consecutivos cualesquiera siempre es igual a 1 por lo que podemos pensar la suma como:

$$S_1(n) = \frac{n}{2},\ si\ \ n\ \ es\ \ par\ \ y\ \ S_1(n) = \frac{n+1}{2},\ si\ \ n\ \ es\ \ impar.$$

2.2 P = 2 [R2]

$$S_2(n) = |\ 1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (n-1)^2 - n^2\ |$$

«Razonamiento»

Calculamos los primeros cinco términos de la suma:

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 4 - 1 &= 3, \\ 9 - 4 + 1 &= 6, \\ 16 - 9 + 4 - 1 &= 10, \\ 25 - 16 + 9 - 4 + 1 &= 15. \end{aligned}$$

Al calcular los primeros cinco términos, podemos ver un patrón claro que no se bifurca: son los números triangulares $C(n+1, 2)$, pero aún no está del todo justificada esta observación.

Para dar una explicación completa al alumno, tendremos que recordar la definición de

$$S(n,\ k) := C(n,\ k) + C(n-1,\ k).$$

Por lo tanto, podemos repensar las sumas anteriores como

$$S(n+1,\ 2) - C(n,\ 2) = C(n+1,\ 2).$$

Es de gran importancia recordar que los números triangulares son la suma de los números naturales. Por lo tanto, podemos reescribir la suma $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ como $(1 + 5 + 9)$. En general, es posible reescribir cualquier suma de naturales como una suma de impares, lo que permite conectar la diferencia entre dos números cuadrados con los impares.

Concluimos, entonces, que la suma de n números cuadrados con signos alternados es equivalente a sumar los primeros n números naturales.

$$S_2(n) = C(n+1,\ 2).$$

2.3 P = 3 [R2]

$$S_3(n) = |\ 1^3 - 2^3 + 3^3 - \ldots + (n-1)^3 - n^3\ |$$

«Razonamiento»

A partir de la identidad que relaciona la suma de los primeros n cubos con los coeficientes binomiales [1, Identidad 10.1], se tiene que

$$n^3 = 6 \cdot C(n,\ 2) + C(n,\ 1).$$

Notemos que $C(n, 1) = n$, por lo que la suma alternada da como resultado $S_1(n)$. Así, el problema se reduce a calcular únicamente $C(n, 2)$.

Calculamos los primeros seis términos de la suma:

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ 1 &= 1, \\ 3 - 1 &= 2, \\ 6 - 3 + 1 &= 4, \\ 10 - 6 + 3 - 1 &= 6, \\ 15 - 10 + 6 - 3 + 1 &= 9. \end{aligned}$$

Notemos que, para n par, la diferencia entre los números triangulares siempre resulta en un número par. Para n impar, la diferencia resulta en números impares, dos sumas que ya conocemos.

Dada la clara bifurcación observada, podemos suponer que las dos formulas para $S_3(n)$ son:

$$S_3(n) = 12 \cdot C(n,\ 2) + C(n,\ 1)\ \textit{si n es impar,}$$

$$S_3(n) = 6 \cdot S(n+1,\ 2) + C(n,\ 1)\ \textit{si n es par.}$$

2.4 P = 4 [R1]

$$S_3(n) = | \ 1^4 - 2^4 + 3^4 - \ ... \ + (n-1)^4 - n^4 \ |$$

La siguiente formula no puede deducirse fácilmente de los múltiples enfoques utilizados para resolver los tres problemas anteriores. Por ello, se comprende mejor como una identidad indirecta:

$$S_4(n) = \sqrt{144 \cdot C(n+2, \ 4)^2 + 72 \cdot N(n+2, \ 4) + C(n+1, \ 2)^2}.$$

Las fórmula fue publicada por el autor en la OEIS (Enciclopedia Electrónica de Secuencias de Enteros); puede consultar la referencia [2].

Se recomienda elevar al cuadrado $S_4(n)$ para eliminar la raíz y así mostrar a los alumnos la secuencia $C(n+1, 2)^2$ e implementar el algoritmo de Sophie, descrito en [pág. 10, 3], para extraer los coeficientes y las secuencias faltantes.

Análisis General

Para las secciones 2.2 y 2.3, se sugiere detallar más la parte de los ejemplos numéricos, de modo que los patrones queden evidentes. Por ejemplo, en lugar de limitarse a una suma breve como $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$, es preferible utilizar hasta 10 sumandos. Esto permite hacer más explícitas las observaciones, como el hecho de que la suma de dos números consecutivos siempre produce un número impar.

En cuanto a la sección 2.4, debe presentarse como una curiosidad numérica que conduzca a ese momento de “Eureka”. Se recomienda utilizar una tabla de cuadrados, ya que esto facilita la comprensión intuitiva de la raíz cuadrada sin necesidad de trabajar formalmente el concepto.

Notas del Autor:

En esta sección me gustaría hablar sobre el objetivo real de mis textos pedagógicos o lo que a mí me gustaría que se lograra para esto me auto adjudicare un caso para mantener el anonimato le llamaremos Alicia a una niña que subió un vídeo a YouTube de una serie de matemáticas muy conocida del Reino Unido que es más fantasía que matemáticas.

Alicia (Primaria)

Un día estaba buscando videos relacionados con la serie, ya que genuinamente me gustaba —llevo años trabajando con patrones numéricos—, así que la veía para aprender y comprender su éxito. En varios aspectos, lo hacen bien: personalizan los números basándose en fundamentos matemáticos sólidos (tienen a un matemático como consultor). En uno de los videos recomendados, aparecieron videos de niños creando teorías sobre la serie —dado que la serie es más fantasía que matemática, lo que provoca especulación—, y entre ellos encontré a Alicia. Su video distaba mucho de los demás.

Alicia, en el video, muestra varios temas —ordenados según su criterio— relacionados con la serie, y se me iluminaron los ojos. Hubiera deseado poder haberle dado uno de mis textos. Continuando con el video, podemos extraer aspectos de suma importancia: Alicia demuestra un pensamiento estructurado, creatividad y una curiosidad genuina. Por ello, en manos de una buena institución educativa, podría ser un talento excepcional. Pero bueno, está en México, y solo espero que no se pierda en este país.

Volviendo al análisis de su video, hay cosas que, obviamente, son extrañas —creo que algunas las podría explicar desde Jung, pero no es mi área—. Entre ellas, Alicia dice: “El número 7 tiene tecnofobia”, porque en un capítulo vemos que el número 7 le tiene miedo a una puerta inteligente, entre otros temas similares. Esto deja claro que no hay sustancia matemática; se pierde en la fantasía y curiosidades vagas. Obviamente, es una niña, y la serie fomenta eso en gran medida —dado que no van más allá de los patrones numéricos básicos, como los triangulares, y la serie termina convirtiéndose en una rueda de hámster por la producción masiva de capítulos—.

Para concluir, me gustaría ver más Alicias y alumnos como ella, pero con sustancia matemática. Queda claro que Alicia parte de una buena base material: tiene un ordenador y PowerPoint. Evidentemente, un menor de una zona rural o de escasos recursos ya queda fuera de esta conversación, y es más difícil incorporarlo. Por ello, propongo estos textos como un puente que invite a vivir en la fantasía y la matemática, y de corazón espero que algún día Alicia se encuentre con Sophie, y no con un conejo.

Agradecimientos. Este texto no podría haber sido escrito sin la ayuda de mi abuela María Esther.

Referencias

[1] Chavez, Yasser A. (2025). The World of Numbers: A Pedagogical Proposal. figshare. Dataset. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.29886221.v2

[2] OEIS Foundation Inc. (2025), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, https://oeis.org/A062392

[3] Chavez, Yasser A. (2026). The Calculating Fireflies: Symbolic Computation. A Pedagogical Proposal.. figshare. Preprint. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.30989386.v3

Palabras clave: Educación matemática , Pedagogía, Secuencias Numéricas, Sophie Germain.

Contacto: math.yasserarath@gmail.com

Las luciérnagas calculistas:
Computación simbólica. Una propuesta pedagógica.

Yasser A. Chavez

Resumen. Propuesta pedagógica que integra computación simbólica en SageMath para enseñar sumas de potencias mediante la Máquina de Faulhaber-Narayana, un marco combinatorio basado en números de Narayana. A través de un enfoque narrativo y colaborativo, los estudiantes exploran patrones, formulan conjeturas y validan resultados, transitando de la aritmética al pensamiento simbólico. El proyecto enfatiza accesibilidad, utilizando software libre para promover la matemática experimental en contextos educativos con menos recursos.

Las luciérnagas calculistas:

Como todas las mañanas, en el mundo de los números, el profesor Diofanto entra en la gran Biblioteca de Pérgamo, lugar en el que tiene una rutina peculiar para seleccionar un papiro: simplemente se deja llevar por lo que su corazón le dicte.

Aquel día, entre sus manos tenía un papiro titulado "Luciérnagas calculistas", del pequeño autor Boole,

En él, plasmó uno de sus sueños: una teoría que, de ser verídica, permitiría realizar cálculos mucho más rápidos que cualquier persona si se coordinase un gran número de luciérnagas mediante un cartel negro —para indicar que dejen de brillar— y uno verde —que indicaría lo contrario—, como si de dirigir una orquesta se tratara.

El profesor, con el papiro en mano, pensó inmediatamente en un joven explorador al que no le vendría mal una ayuda con sus cálculos, pues desde hacía tiempo se había sumergido en el problema de las sumas de potencias de números naturales.

Una vez que Faulhaber tuvo el papiro de las Luciérnagas calculistas, se encaminó al Bosque Profundo, un lugar donde las matemáticas aún no habían llegado.

El sonido de la hierba crujiendo se hacía más fuerte, lo que provocó que aquel explorador se detuviera antes de entrar.

—¿Te puedo acompañar? —exclamó Sophie con una mirada de ternura—. Nunca he entrado al bosque, y Boole me ha contado que en él viven insectos capaces de calcular números primos más rápido que el profesor Eratóstenes.

—Por supuesto, pero me tienes que ayudar —respondió Faulhaber mientras le entregaba un papiro en blanco—. Tu tarea es desarrollar un algoritmo como el de Eratóstenes, donde tendrás que extraer los coeficientes de las secuencias que se vean involucradas en mi expresión final.

—Bueno, ¿qué esperamos para entrar? —dijo Sophie mientras encendía su vela.

—No la ocupas —dijo Faulhaber—. Los insectos que buscamos son como velas andantes —añadió mientras ilustraba su ejemplo con la vela.

Los dos exploradores pasaron horas estudiando las luciérnagas y el papiro. Para sorpresa de Faulhaber, aquel día marcaría un precedente en el mundo de los números, pues el sueño del pequeño Boole resultó ser verdad.

Después de haber calculado sumas de potencias para valores de P altos, Faulhaber ofreció polen y gotas de agua del Río-Arquímedes.

1 Introducción

En este trabajo se presenta un laboratorio experimental desarrollado en SageMath, un sistema de álgebra computacional abierto y unificado, basado en Python, que integra numerosas herramientas matemáticas. Este entorno es especialmente valioso en contextos pedagógicos por su interfaz coherente y su capacidad interactiva, las cuales facilitan la experimentación y la visualización de conceptos abstractos [1].

El proyecto se enmarca dentro de la matemática experimental, un enfoque moderno que utiliza la computación y la experimentación para explorar, descubrir patrones, formular y probar conjeturas matemáticas. Dentro de esta metodología pueden encontrarse iniciativas como GIMPS (búsqueda de números primos de Mersenne) y La Máquina de Ramanujan (dedicada a la identificación de constantes como π) [2], [3].

Nuestro proyecto, "La Máquina de Faulhaber-Narayana", se inspira en las dos iniciativas mencionadas, pero se distingue por dos diferencias fundamentales: 1) su motivación pedagógica y 2) el uso de una secuencia lógica determinista. Estas características lo convierten en un proyecto más accesible y, en consecuencia, lo posicionan como una introducción efectiva tanto al uso de softwares simbólicos (CAS) como a la metodología de la matemática experimental.

Para el desarrollo de este proyecto fue fundamental el texto *Conjectures on the Sums of Powers of Natural Numbers Via Combinatorial Sequences*, que proporciona su esqueleto teórico [4], y el texto *The World of Numbers: A Pedagogical Proposal*, que aporta el enfoque didáctico y la presentación [5]. De este modo, el proyecto es de naturaleza híbrida, ya que la mayor parte de su código se fundamenta en el contenido matemático del primer trabajo.

Es de gran importancia resaltar que todos estos proyectos son de uso gratuito —incluyendo LibreOffice Writer, con el cual se redactó este texto—, lo que implica cero coste para escuelas y padres de familia, más allá de la barrera inicial de contar con acceso a internet. Por tanto, para ejecutar nuestro proyecto solo se requiere un dispositivo un ordenador y conexión a la red.

Por lo tanto, en espíritu, este trabajo es un homenaje a los primeros hackers: John Draper, Steve Wozniak y Kevin Mitnick. Personas que jugaron con el conocimiento existente, llevándolo a límites inimaginables mediante la experimentación, una curiosidad insaciable y, sobre todo, desafiando a las autoridades del sector privado o gubernamental, mostrando que el conocimiento, por más candados que tenga, puede abrirse e incluso generar nuevo conocimiento residual.

2 Contexto matemático

El nombre de la máquina rinde homenaje a dos matemáticos: Johann Faulhaber (el primero en obtener resultados destacados sobre el problema de las sumas de potencias de números naturales) y Tadepalli Venkata Narayana (quien desarrolló la interpretación combinatoria de los números de Narayana, parte fundamental de nuestro framework).

La Maquina de Faulhaber-Narayana
(Para potencias impares con p>7)

1) Si (p+1) es divisible por 4:

$$\frac{\sum k^p - \sum k^{p-2}}{24} - \frac{\sum k^7 - \sum k^5}{24} - \frac{\delta_p(m) - \delta_{p-2}(m)}{24} = \varepsilon(p)$$

2) Si (p-1) es divisible por 4:

$$\frac{\sum k^p - \sum k^{p-2}}{24} - \frac{\sum k^7 - \sum k^5}{24} - \frac{\delta_p(m)}{24} = \varepsilon(p)$$

2.1 Definición de δ_p(m)

Para definir δ_p(m) de manera precisa, es necesario comprender primero qué son las "secuencias iniciales" y los "coeficientes iniciales" en nuestro framework.

Secuencias iniciales

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 6 \cdot C(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2),$$

$$\sum_{n=1}^{n} k^5 = 24 \cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = 72 \cdot C(n+2,\ 4)^2 + \ldots + C(n+1,\ 2)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^9 = 8640 \cdot N(n+3,\ 6) + 288 \cdot C(n+2,\ 4)^2 + \ldots + C(n+1,\ 2)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{11} = 1728 \cdot N(n+2,\ 4)^2 + \ldots + C(n+1,\ 2)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{13} = 14515200 \cdot N(n+4,\ 8) + 388800 \cdot C(n+3,\ 6)^2 + \ldots. + C(n+1,\ 2)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{15} = 20736 \cdot C(n+2,\ 4)^4 + \ldots + C(n+1,\ 2)^2.$$

Denominamos “Secuencias iniciales” a las siguientes secuencias:
$C(n+2, 4)$, $N(n+2, 4)$, $C(n+2, 4)^2$, $N(n+3, 6) + C(n+2, 4)^2$, $N(n+2, 4)^2$, $N(n+4, 8) + C(n+3, 6)^2$ y $C(n+2, 4)^4$.

Denominamos “Coeficientes iniciales” a los siguientes coeficientes:
6, 24, 72, 8640, 288, 1728, 14515200, 388800 y 20736.

A simple vista se puede observar un patrón en las secuencias: en las posiciones impares se identifica una recurrencia en la cual se eleva a la segunda potencia, repitiéndose este proceso cada vez que la secuencia reaparece. Por otro lado, las posiciones pares corresponden a números de Narayana y Binomiales, específicamente $N(n+k, 2k)$ y $C(n+k-2, 2k-2)^2$ para $k > 1$.

Para lograr una comprensión más profunda, aunque sin pretender ser completamente riguroso, podemos apoyarnos en un resultado clásico que establece que la n-ésima suma de potencias es un polinomio en n de grado $p+1$, cuyos dos términos principales son $n^{(p+1)}/(p+1)$ y $n^{p}/2$.

Por ejemplo, dado que

$$\sum k^3 = 6 \cdot C(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \ldots$$

si elevamos al cuadrado obtenemos:

$$\left(6 \cdot C(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)\right)^2 = \frac{1}{16}n^8 + \frac{1}{4}n^4 + \ldots$$

Sin embargo, observamos que es necesario ajustar los términos principales $n^8/16$ y $n^4/4$ multiplicándolo por 2 para obtener $n^8/8$ y $n^4/2$. Esto resulta en un coeficiente final de 72, que es precisamente el coeficiente de $\sum k^7$, ya que dicha suma corresponde a un polinomio de grado 8.

Por su parte, los coeficientes no presentan un patrón evidente. Sin embargo, ahora sabemos que las potencias de la forma $p = 4m - 1$ requieren un reajuste en su coeficiente. Dentro de esta familia, podemos identificar una subfamilia que corresponde a las secuencias $C(n+2,\ 4)$, $C(n+2,\ 4)^2$ y $C(n+2,\ 4)^4$, cuyos coeficientes son, respectivamente: 6, $6^2 \cdot 2$ y $6^4 \cdot 2^2 \cdot 4$. Nótese el patrón descrito previamente: en cada paso se eleva al cuadrado y se incorpora un factor adicional como ajuste.

Para una discusión más detallada de los coeficientes de las secuencias restantes, véase [4, Sec. 3.1, 3.2 y 4.1.4].

Ahora que conocemos las fórmulas cerradas de los coeficientes, podemos ofrecer la definición precisa de δ_p(m).

Definición de δ_p(m)

1) si (p+3) es divisible por 8:

$$\delta_p(m) := A(m) \cdot N(n+2m,\ 4m) + A(m) \cdot \frac{y(m)}{x(m) \cdot z(m)} \cdot C(n+2m-1,\ 4m-2)^2,\ m \geqslant 1.$$

Donde:

$$-A(m) = (2m)(4m-3)\left[(4m-2)!\right]^2$$

$$-\left(x(m),\ y(m),\ z(m)\right) = (8m,\ 2m-1,\ 4m-1)$$

2) si (p-1) es divisible por 8:

$$\delta_p(m) := A(m) \cdot N(n+2m+1,\ 4m+2) + A(m) \cdot \frac{y(m)}{x(m) \cdot z(m)} \cdot C(n+2m,\ 4m)^2,\ m \geqslant 1.$$

Donde:

$$-A(m) = (2m+1)(4m-1)\left[(4m)!\right]^2$$

$$-\left(x(m),\ y(m),\ z(m)\right) = \left(C(2m+2,\ 2),\ C(m+1,\ 2),\ 4m+1\right)$$

3) si (p+1) es divisible por 2^[(p+1)/4 + 1]:

$$\delta_p(m) := 6^{2^m} \cdot 2^{\left(2^{m+1} - m - 2\right)} \cdot C(n+2,\ 4)^{2^m},\ m \geqslant 0.$$

4) si (p-3) es divisible por 8:

$$\delta_p(m) := \left(\delta_{p-1/2}(m)\right)^{2^R} \cdot \frac{p+1}{4}, \quad R \geqslant 1.$$

Donde:

$-R$ *indica la profundidad recursiva*

Ejemplo: Para una potencia cualquiera, si debemos seleccionar una secuencia elevada al cuadrado, solo debemos evaluar en $R = 2$.

De los cuatro casos, el más accesible de comprender es el (3), ya que recicla constantemente la secuencia $C(n+2, 4)$ y la terna $(x(m), y(m), z(m))$. Tras realizar algunas factorizaciones empíricas, es posible obtener sus valores, para luego proceder a una verificación mediante la identidad NSC (véase [4, Sec. 3.2.1]).

La parte menos clara se relaciona con el coeficiente $A(m)$, que interviene en tres de los cuatro casos. Aunque no contemos con una explicación rigurosa del mismo, ello no nos impide impartir una clase efectiva, siempre que se comprendan las limitaciones técnicas del contenido matemático que se desarrolla.

2.2 Que es $\varepsilon(p)$?

La expresión que devuelve la Máquina de Faulhaber-Narayana la denotamos por $\varepsilon(p)$ y, en esencia, corresponde a las secuencias cuyos coeficientes no podemos predecir.

Tabla-$\varepsilon(p)$

p	$\varepsilon(p)$
1	0
3	0
5	0
7	0
9	0
11	0
13	$648 \cdot N(n+2, 4)^2 - 396 \cdot (30 \cdot N(n+3, 6) + C(n+2, 4)^2)$
15	$636 \cdot (30 \cdot N(n+3, 6) + C(n+2, 4)^2)$

La tabla anterior proporciona la siguiente información sobre la MFN (Máquina de Faulhaber-Narayana):

1. Para los valores de $p = 1, 3, 5, 7, 9$ y 11, se cumple que $\varepsilon(p) = 0$, lo que significa que los términos que se restan en la sumatoria principal son equivalentes a esta. Por lo tanto, solo es necesario multiplicar el lado izquierdo por 24 y pasar al otro lado los términos que no representan mayor dificultad, ya que corresponden a sumas que hemos calculado con anterioridad.

2. Calcular $\varepsilon(p)$ es equivalente a encontrar los coeficientes de una combinación lineal.

Por lo tanto, podemos reducir el problema de las sumas de potencias al cálculo de $\varepsilon(p)$.

2.3 El problema de los tres coeficientes en $\varepsilon(p)$

Existe un problema importante en relación con el cálculo de $\varepsilon(p)$ cuando se trabaja con tres coeficientes, dado que, en el caso de dos coeficientes, este se puede resolver fácilmente implementando un algoritmo por fuerza bruta. Dicho algoritmo sumaría y restaría paralelamente el término mayor a 1 de una secuencia a $\varepsilon(p)$, y mediante ciertas condiciones podríamos asegurarnos de filtrar falsos positivos entre los coeficientes.

Coeficientes en $\varepsilon(p)$

p	Coef($\varepsilon(p)$)
13	$720 - 72 = 648, -396 - 0 = -396$
15	$240 + 396 = 636$

Los coeficientes se extraen de las fórmulas para p = 11 y 13:

$$\frac{1728}{24} = 72, \quad \frac{9504}{24} = 396.$$

Si bien no disponemos de un método para conocer directamente los coeficientes, podemos saber que una parte de estos está compuesta por coeficientes anteriores. Aunque este aspecto no es central para el problema, sí nos proporciona cotas más precisas que permiten fijar un valor entero y hacer más eficiente la búsqueda por fuerza bruta. Sin embargo, para resolver el caso de más de dos coeficientes, se necesitaría un algoritmo especializado —del cual desconocemos si existe— que queda fuera del propósito de este trabajo.

Para entender completamente por qué para $p = 13$ puede resolverse utilizando el mismo algoritmo de dos coeficientes, debemos considerar que las secuencias $N(n+k, 2k)$ y $C(n+k-2, 2k-2)^2$ comparten un factor común, tal como se detalla en la definición de $\delta_p(m)$ para los casos 1 y 2. Por esta razón, pueden tratarse como una única secuencia.

3 Implementación en SageMath

El código también está disponible en Pastebin para facilitar su lectura y puede ejecutarse desde cualquier navegador web mediante SageMath.

```
var('n k') # We declare the symbolic variables

def SIGMA(p): # Summation: 1^p + 2^p + 3^p + 4^p + ... + n^p
    return sum(k^p, k, 1, n)

# Definition of the three fundamental combinatorial sequences of the framework
def C(n, k):
    return binomial(n, k)

def S(n, k):
    return C(n-1, k) + C(n, k)

def N(n, k):
    return C(n, k)*C(n, k-1)/n

#Combinatorial sequences for odd powers
lseq = [N(n+2, 4), C(n+2, 4)^2, N(n+3, 6), N(n+2, 4)^2, N(n+4, 8), C(n+2, 4)^4,
N(n+5, 10), N(n+3, 6)^2]
lnsc = [6*N(n+3, 6) + S(n+3, 5)^2, 16*N(n+4, 8) + 3*S(n+4, 7)^2, 15*N(n+5, 10) +
3*S(n+5, 9)^2]

def first_values(seq):
    print("------------------------------\n")
    for j in range(1, 11):
        print(f"n={j}: {seq.subs(n=j)}")
    print("\n------------------------------\n")

def f(m): # Conjectures for Odd Powers [4, Sec. 3]
    if (m-1)%4 == 0: # [4, Sec. 3.2]
        i = (m-1)//4
        coef = (i+1)*(2*i+1)*factorial(2*i)^2
        if (m+3)%8 == 0:
            u = i - ((m+3)//8-1)
            a, b, c = 8*u, 2*u-1, (m+1)//2
            return coef*lseq[4*(u-1)] + coef*(b/(a*c))*C(n+i, c-1)^2
        else:
            u = ((m-1)//8-1)
            a, b, c = C(2*(u+1)+2, 2), C(u+2, 2), (m+1)//2
            return coef*lseq[4*u+2] + coef*(b/(a*c))*C(n+i, c-1)^2
    else: # [4, Sec 3.1]
        i = (m+1)//4
        if (m+1)%2^i == 0:
            return (6^(2^(i-2)))*(2^(2^(i-1) - i))*lseq[2^(i-1)-3]
        else:
            u = (m-1)//2
            i = (u-1)//4
            coef = (i+1)*(2*i+1)*factorial(2*i)^2
            return (coef^2)*((m+1)//4)*lseq[u-2]
```

```
def fn_machine(p): # Coefficients in odd powers [4, Sec. 4.1.5]
    if p > 11:
        if (p+1)%4 == 0:
             return (SIGMA(p) - SIGMA(p-2))/24 - (SIGMA(7) - SIGMA(5))/24 - f(p)/24
+ f(p-2)/24
        else:
            return (SIGMA(p) - SIGMA(p-2))/24 - (SIGMA(7) - SIGMA(5))/24 - f(p)/24
    else:
        if p <= 5:
            return SIGMA(p)
        else:
            return (SIGMA(p) - SIGMA(p-2))/24 - (SIGMA(5) - SIGMA(3))/24

def sophie_algorithm(expr, seq1, seq2): # Extract the coefficients of the two
sequences involved in an expression
    for j in range(1, 11):
        if expr.subs(n=j) >= 1:
            v = j+1
            break

    coef, first = 0, seq1[0]
    tsymbol2 = tsymbol1 = expr.subs(n=v)
    while coef < expr.subs(n=v):
        tsymbol1 += 3*first
        tsymbol2 -= 3*first
        coef += 3
            if  (int(tsymbol1)%seq2[0]  ==  0)  and  (tsymbol1/seq2[0]  -  coef  ==
expr.subs(n=v-1)):
            if int((expr.subs(n=v+1)) + coef*seq1[1])%seq2[1] == 0:
                print("-------------------------------")
                print(f"| 1, {seq1[0]}, {seq1[1]}, ... (coefficient): - {coef} |")
                      print(f"|  1,  {seq2[0]},  {seq2[1]},  ...  (coefficient):
{tsymbol1.subs(n=v+1)/seq2[0]}  |")
                print("-------------------------------\n")
            if  (int(tsymbol2)%seq2[0]  ==  0)  and  (coef  +  tsymbol2/seq2[0]  ==
expr.subs(n=v-1)):
            if int((expr.subs(n=v+1)) - coef*seq1[1])%seq2[1] == 0:
                print("-------------------------------")
                print(f"| 1, {seq1[0]}, {seq1[1]}, ... (coefficient): + {coef} |")
                      print(f"|  1,  {seq2[0]},  {seq2[1]},  ...  (coefficient):
{tsymbol2.subs(n=v+1)/seq2[0]}  |")
                print("-------------------------------\n")

def validation(expr, p): #We subtract the sequences from the expression given by
the FM, since our approach is based on reducing the expression SIGMA(9) to 0.
    print("-------------------------------")
    print(f"| n | Faulhaber-Narayana Machine | 1^{p} + 2^{p} + 3^{p} + ... + n^{p}
|\n")
    sum = SIGMA(p)
    fnm = sum - expr
    for j in range(1, 10):
        print(f"| {j} | {fnm.subs(n=j)} | {sum.subs(n=j)} |\n")
    print(f"| 10 | {fnm.subs(n=10)} | {sum.subs(n=10)} |")

    print("-------------------------------")
    if (sum - fnm) == 0:
        print("<<The formula is correct>>")
```

```
    else:
        print("<<The formula is not correct>>")
    print("--------------------------------")

def calculating_fireflies(p, d): # Interface for faulhaber_machine
    expr = fn_machine(p)
    print(f"- Faulhaber-Narayana Machine [P = {p}] -\n")
    for j in range(1, 11):
        print(f"n={j}: {expr.subs(n=j)/d}")
    print("\n--------------------------------\n")

    return expr

# Example (P = 9)
# We obtain an expression that isolates the sequences whose coefficients cannot be
predicted
fnm_expr = calculating_fireflies(9, 1)

# Show the first 10 values of a sequence
first_values(lnsc[0])
first_values(lseq[1])

# We obtain the two unknown coefficients
sophie_algorithm(fnm_expr, [55, 855], [25, 225])
final_expr = fnm_expr - (12*(6*N(n+3, 6) + S(n+3, 5)^2) + 3*C(n+2, 4)^2)

# We verify the truthfulness of the final expression using Bernoulli's formula for
the given power
validation(final_expr, 9)
```

Notas:

1. lseq contiene todas las secuencias iniciales.
2. lnsc contiene únicamente las secuencias iniciales para $p = 4m+1$.
3. Nuestra $\delta_p(m)$ la denoto por $f(m)$.
4. sophie_algorithm() es el algoritmo para extraer dos coeficientes de $\varepsilon(p)$.

4 Proyecto pedagógico

Pretender que los alumnos logren un aprendizaje significativo con relación a los contenidos presentados en una sola clase sería perjudicial, por lo que se recomienda tratarlo como un proyecto con una duración estimada de una semana, garantizando así una inmersión adecuada en el framework.

4.1 El mundo de los números

Es un requisito indispensable haber cubierto por completo el texto *El mundo de los números: una propuesta pedagógica*, ya que será el principal canal para poder trabajar paralelamente con el código, entendiendo que, por ejemplo, el algoritmo de Sophie está implícito en los problemas lúdicos planteados.

Después de haber trabajado el texto pueden surgir distintas preguntas: ¿Dónde queda el álgebra? ¿Qué lugar toma el alumno si se deja afuera el álgebra y es dependiente de la calculadora? ¿Es bueno confiar ciegamente en los patrones numéricos sin comprobaciones rigurosas?, entre otras tantas.

La ausencia del álgebra por parte del alumno es una de las preguntas más interesantes, pero no es necesariamente algo malo, pues si el alumno puede resolver $\sum k^{13}$ o $\sum k^{15}$ con aritmética, es porque existe una interfaz que hace posible reducir un problema que suele resolverse con un álgebra tediosa (Método de Pascal). Por lo tanto, esta interfaz funciona como un software de alto nivel que es accesible para los humanos, pero que a su vez también se comunica con la máquina; en este caso, el código binario sería el álgebra y nuestro framework combinatorio sería Python.

El alumno se convierte en un explorador que, con la aritmética, se abre paso mientras clasifica las nuevas criaturas (secuencias) que van apareciendo. De esta manera, desarrolla un pensamiento estructurado que será crucial para formular predicciones (conjeturas) sobre futuras secuencias. La parte más técnica se irá puliendo conforme las soluciones directas resulten insuficientes para resolver las sumas, lo que lo llevará a repensar conceptualmente el problema. Este proceso conduce finalmente a un pensamiento simbólico, necesario para comprender por qué funciona la MFN.

4.2 El puente narrativo

Es importante tender un puente narrativo antes de abordar directamente el código, dado que SageMath es otra interfaz que puede reforzar la percepción de unas "matemáticas mágicas". Para mitigar esto, necesitamos situar a los alumnos en un escenario que les resulte cercano, de modo que el código sea percibido como una extensión natural del pensamiento humano.

El siguiente relato está relacionado con mi novela corta titulada “Vecindario Psintar”, la cual integra las matemáticas como parte de una aventura urbana juvenil y puede consultarse en Internet Archive [6].

El laboratorio de Elena:

Elena se pasó toda la tarde remodelando el espacio donde tenía su ordenador, decorándolo con cartones que pintó para convertirlo en un laboratorio informático, dándole un toque moderno gracias a sus distintas aplicaciones de diseño creativo.

Elena había citado a sus amigos frente a su casa.

—¡Ya voy! —gritó Elena al escuchar a Yamil llamarla desde afuera—.
—Entren, que tengo que mostrarles algo —dijo mientras abría la puerta.

—¿Te regalaron una iguana como mascota? —preguntó Yamil mientras subía los escalones.

—No —respondió Elena entre risas.

—Qué mal, eso sí que sería genial —comentó Yamil—. Nunca he tenido oportunidad de tocar una; siempre son más veloces que uno.

Elena hizo una parada dramática cuando llegaron frente a su habitación.

—Bienvenidos a mi laboratorio —anunció mientras abría la puerta.

—¡Qué bonito! —dijo Isabel, tocando la textura de los cartones decorados.

—¿Y esto para qué sirve? —preguntó Yamil mientras se sentaba frente al ordenador.

—Sencillo: solo tienes que escribir tus fórmulas en el ordenador —respondió Elena—, y te dice si estás bien o mal —añadió, haciendo el gesto de “like” y “dislike”.

—¡Ah, eso es trampa! —protestó Yamil.

—No es trampa, es otra forma de hacer matemáticas —replicó Elena.

—Haremos dos equipos: yo e Isabel seremos el equipo Croissant. ¿Y ustedes, cómo se llamarán? —preguntó Elena a sus dos amigos.

—Fácil: la Pandilla Numérica —respondió Yamil—. Somos los mejores detectives de la ciudad, y las matemáticas no son más que enigmas.

—Perfecto, pues ¿qué esperamos para ponernos a trabajar? —dijo Elena mientras encendía su ordenador—. Por estas rendijas nos tienen que pasar sus fórmulas, y nosotras las comprobamos —añadió mientras desplegaba todo el mecanismo hecho con cartón.

Después de algunos minutos, la Pandilla Numérica pudo dar nuevamente con la fórmula de los números cuadrados, aunque, como era costumbre, aún les costaba la notación.

—Listo, aquí tienen —dijo Yamil mientras pasaba la fórmula por la rendija.

—Ya sabía que no podía confiar en ustedes —dijo Isabel—. Esto no es una fórmula; ¿qué significa el cuadrado?

—Son los números 1, 4, 10, 20… Es fácil de ver —argumentó Yamil—. Si los números triangulares son 1, 3, 6, 10, 15…, estos tienen que ser números cuadrados —añadió mientras le enseñaba todo el desarrollo a Isabel.

—Bueno, trataré de arreglarlo —dijo Isabel.

—Listo, ya tenemos el resultado. Aquí tienen —dijo Elena mientras devolvía el papel.

—¿Entonces estábamos bien? —preguntó Yamil al ver un punto verde.

—Así es, ¿no es genial? —exclamó Elena, llena de felicidad.

—Sí, pero los detectives tendrán que investigar una mejor forma de escribir sus fórmulas —señaló Isabel.

Aquella tarde, el grupo dio con una metodología que amplificaba sus habilidades y, lo más importante, cada uno encontró su lugar: Yamil y José, como los mineros que parecían nunca rendirse ante un problema hasta llegar a la fórmula; Isabel, como la directora de la orquesta que indicaba por dónde investigar; y Elena, encargada de poner la tecnología al servicio del grupo, usando inteligencia artificial y software simbólico.

4.3 Fase 1

Los alumnos repasarán las primeras dos sumas ($p = 3$ y 5), pero utilizarán únicamente el código de SageMath como herramienta principal, para que se vayan familiarizando con las funciones.

Código para $p = 3$

```
fnm_expr = calculating_fireflies(3, 1)

sophie_algorithm(fnm_expr, [1, 5], [3, 6])
```

sophie_algorithm (modificado para $p = 3$ y 5)

```
if (int(tsymbol2)%seq2[0] == 0) and (coef + seq2[0] == expr.subs(n=v)):
```

Solo se modifica el primer condicional if`, dado que la segunda secuencia para p = 4 y 5 rompen la condición.

Output (p = 3):

```
- Faulhaber-Narayana Machine [P = 3] -

n=1: 1
n=2: 9
n=3: 36
n=4: 100
n=5: 225
n=6: 441
n=7: 784
n=8: 1296
n=9: 2025
n=10: 3025

------------------------------

------------------------------
| 1, 1, 5, ... (coefficient): + 6 |
| 1, 3, 6, ... (coefficient):   1  |
------------------------------
```

Output (p = 5):

```
- Faulhaber-Narayana Machine [P = 5] -

n=1: 1
n=2: 33
n=3: 276
n=4: 1300
n=5: 4425
n=6: 12201
n=7: 29008
n=8: 61776
n=9: 120825
n=10: 220825
------------------------------
------------------------------
| 1, 1, 10, ... (coefficient): + 24 |
| 1, 9, 36, ... (coefficient):   1  |
------------------------------
```

En los outputs se muestran los respectivos coeficientes para las fórmulas: $6 \cdot C(n+2, 4) + C(n+1, 2)$ y $24 \cdot N(n+2, 4) + C(n+2, 4)^2$. Hay un error en el print donde aparece (1, 1, …), dado que el algoritmo no estaba pensado para los casos triviales, pero esto puede solucionarse fácilmente.

Para comprobar las fórmulas podemos usar la función validation(), pero modificamos la variable fnm asignándole el valor de la expresión directamente fnm = expr.

Es importante saber que sophie_algorithm() trabaja con el segundo término positivo (≥1); es decir, para la suma de k^3 y k^5, opera con los términos $n = 2\ (9)$ y $n = 2\ (33)$. Por lo tanto, es necesario pasarle las secuencias:

-Para k^3 : $([1, 5], [3, 6])$.
-Para k^5: $([1, 10], [9, 36])$.

Se recomienda escribir un nuevo código basado en el ya existente, dado que solo se requiere la función sophie_algorithm(). Incluso se puede prescindir de la función validation() y experimentar expandiendo la fórmula y función SIGMA(p) mediante el método .expand(), utilizando dos instrucciones print previas:

```
formula = 24*N(n+2, 4) + C(n+1, 2)²

print(formula.expand())

print(SIGMA(5).expand())
```

4.4 Fase 2

Existe un problema con la MFN que afecta su aplicación pedagógica, dado que $\varepsilon(p) = 0$ para $1 \leq p \leq 11$. Por ello, debemos simplificar su estructura, quitando algunos de sus engranajes, para que los alumnos puedan descubrir $\delta_p(m)$ de forma orgánica en los casos $p = 7, 9$ y 11.

Desde esta fase implementaremos una metodología de trabajo similar a la descrita en el relato de Elena, la cual consta de dos equipos que trabajarán paralelamente:

Equipo 1	Equipo 2
Este equipo trabajará exclusivamente con el código de SageMath, donde dispondrá de las siguientes funciones: - first_values() - calculating_fireflies() - sophie_algorithm() - validation()	Este equipo trabajará exclusivamente con lápiz, cuaderno y calculadora.

Notemos que entre el Equipo 2 (E2) y el Equipo 1 (E1) hay varios siglos de distancia en la forma de hacer matemáticas, lo que crea un laboratorio pedagógico donde ambos equipos, al interactuar entre sí, irán desarrollando habilidades tanto modernas como clásicas (como el reconocimiento de patrones de alto nivel).

4.4.1 Anatomía del E2

Este equipo enfrenta la mayoría de los obstáculos, dado que el E1 depende de los datos generados por el E2. Por lo tanto, su tarea requiere un esfuerzo cognitivo mayor, ya que tendrán que elaborar conjeturas para que el E1 pueda comenzar a trabajar, evitando así limitarse únicamente a comprobar las fórmulas propuestas por el E2.

Si el E2 no es capaz de formular tales conjeturas, el proyecto no puede avanzar. Por ello, es importante que el profesor guíe a los alumnos para que reconozcan patrones en las secuencias iniciales, dejando el cálculo de los coeficientes en manos del E1, quien puede determinarlos en cuestión de segundos.

La parte operativa en este equipo es crucial, dado que un mal manejo de la notación de las secuencias invalida por completo las comprobaciones de las fórmulas. Por ejemplo, en la suma de quintas potencias:

n	$24\cdot N(n+2, 4)$, $n\geq 1$	$C(n+1, 2)^2$, $n\geq 1$	$\sum k^5$
1	$24\cdot 0$	1	1
2	$24\cdot 1$	9	33
3	$24\cdot 10$	36	276
4	$24\cdot 50$	100	1300

Los alumnos tienen que considerar los ceros de las secuencias, teniendo en cuenta que n inicia en 1. Deben reflexionar sobre el hecho de que, si $n = 4$, entonces $N(n, 4) = 1$; pero como en todas las sumas de potencias el primer término vale 1, necesitamos restarle 1, lo que da 3. Dado que tenemos fijo a n en 1, le sumamos 2. Se recomienda siempre tomar como referencia el número derecho en $N(n, k)$ para ser más precisos.

4.4.2 Casos críticos

1) $(p = 6)$:

Si intentamos aplicar el Método Directo (M.D) que describimos en [5] a $N(n+2, 4)$, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\left(3\cdot\sum_{k=1}^{n} C(n+1,\ 3)^2\ +\ S(n+3,\ 5)\right)\ =\ 0,\ 2,\ 29,\ 189,\ \ldots$$

Dado que los coeficientes son racionales, no pueden emplearse algoritmos diseñados para coeficientes enteros. Por lo tanto, resulta antinatural multiplicar por 2 solo para cancelar el denominador. Se recomienda, en cambio, dejar que los alumnos experimenten primero con estas secuencias complejas, para luego optar por el siguiente enfoque algebraico:

$$k^3\ =\ 6\cdot C(k+1,\ 3)\ +\ C(k,\ 1)$$

Solo volvemos a multiplicar la expresión combinatoria por sí misma para llegar a (p = 6):

$$k^3 \cdot k^3 \;=\; 36 \cdot C(k+1,\ 3)^2 \;+\; 12 \cdot C(k+1,\ 3) \cdot C(k,\ 1) \;+\; C(k,\ 1)^2$$

Aplicamos la sumatoria en cada término y obtenemos la fórmula:

$$\sum_{k=1}^{n} k^6 \;=\; 36 \cdot \sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 \;+\; 24 \cdot S(n+3,\ 5) \;+\; S(n+2,\ 3)$$

Notemos que $C(n+1, 3) \cdot C(n, 1) = C(n+1, 3) \cdot n$ y $C(n, 1)^2 = n^2$. Por lo tanto, estos productos son familiares para los alumnos, ya que, por definición, corresponden al (M.D) aplicado a $\sum k^3$.

2) (p = 9):

Antes de aplicar el (M.D) a $S(n+2, 4)^2$, tienen que usar la siguiente identidad :

Identidad NSC

$$N(n,\ k) \;=\; \frac{S(n,\ k-1)^2 \;-\; C(n-1,\ k-2)^2}{4k},\ \textit{donde}\ \ n,\ k \in \mathbb{N}\ \ y\ \ k \geqslant 2.$$

Por lo tanto, $S(n+2, 4)^2$ es equivalente a la expresión $20 \cdot N(n+2, 5) + C(n+1, 3)^2$, y procedemos a aplicar el (M.D) a cada secuencia, lo que devuelve términos limpios.

3) (p = 11):

Para $p>9$, la complejidad operativa se vuelve muy intrincada, por lo que se recomienda el siguiente razonamiento algebraico basado en el grado de las secuencias:

$$24^2 \cdot N(n+2,\ 4)^2 \;=\; \frac{1}{36} n^{12} \;+\; \frac{1}{6} n^{11} \;+\; \ldots$$

Hacemos el respectivo ajuste para que coincida con el teorema de los polinomios:

$$24^2 \cdot 3 \cdot N(n+2,\ 4)^2 \;=\; \frac{1}{12} n^{12} \;+\; \frac{1}{2} n^{11} \;+\; \ldots$$

Después de analizar los tres casos, el E2 ya cuenta con los datos suficientes para teorizar las secuencias iniciales correspondientes a $p = 13$ y 15. Por lo tanto, el trabajo operativo concluye en $p = 11$.

Se recomienda que los alumnos vayan intercambiando roles para lograr un aprendizaje más completo y fomentar el trabajo en equipo, con un enfoque en la investigación matemática.

4.5 Fase 3

En esta fase, la MFN funciona con normalidad, por lo que los alumnos deben comenzar a comprender los patrones de las secuencias iniciales y patrones recursivos en las fórmulas.

Fórmulas recursivas para potencias impares

$$\frac{\Sigma k^5 - \Sigma k^3}{24} = N(n+2,\ 4)$$

$$\frac{\Sigma k^7 - \Sigma k^5}{24} = 3 \cdot C(n+2,\ 4)^2 + N(n+2,\ 4),$$

$$\frac{\Sigma k^9 - \Sigma k^7}{24} = 12 \cdot NSC(1) + 3 \cdot C(n+2,\ 4)^2 + N(n+2,\ 4),$$

$$\frac{\Sigma k^{11} - \Sigma k^9}{24} = 72 \cdot N(n+2,\ 4)^2 - 12 \cdot NSC(1) + 3 \cdot C(n+2,\ 4)^2 + N(n+2,\ 4),$$

Es importante comenzar a tratar las secuencias iniciales para $p = 4m+1$, con $m \geq 2$, como una única secuencia, que denotaremos por $NSC(1) = 30 \cdot N(n+3,\ 6) + C(n+2,\ 4)^2$. De las cuatro fórmulas anteriores podemos observar que las secuencias $N(n+2,\ 4)$ y $C(n+2,\ 4)^2$ tienen coeficientes constantes, lo cual será útil para ir depurando $\varepsilon(p)$ y llegar a la fórmula final de la MFN.

Es de gran importancia no confundir la secuencia inicial $C(n+2,\ 4)^2$ proveniente de $p = 7$ con la secuencia inicial $C(n+2,\ 4)^2$ proveniente de $p = 9$. Si bien son la misma y en la fórmula final pueden sumarse, nos interesa tratarlas por separado, ya que esto facilita una implementación más eficiente de sophie_algorithm() para $p = 13$ y 15.

4.5.1 Ensamblando la MFN

Existe un último patrón muy difícil de percibir teniendo solo las cuatro fórmulas iniciales, por lo que mostraremos las siguientes correspondientes a $p = 13$ y 15:

$$\frac{\Sigma k^{13} - \Sigma k^{11}}{24} = 16200 \cdot NSC(2) + 648 \cdot N(n+2,\ 4)^2 - 396 \cdot NSC(1) + 3 \cdot C(n+2,\ 4)^2 + N(n+2,\ 4),$$

$$\frac{\Sigma k^{15} - \Sigma k^{13}}{24} = 864 \cdot C(n+2,\ 4)^4 - 16200 \cdot NSC(2) + 636 \cdot NSC(1) + 3 \cdot C(n+2,\ 4)^2 + N(n+2,\ 4).$$

Si observamos solo las fórmulas para $p = 11$ y 15, podemos notar que las secuencias iniciales $NSC(1)$ y $(NSC(2) = 112 \cdot N(n+4, 8) + 3 \cdot C(n+3, 6)^2)$ se restan; es decir, las fórmulas para $p = 4m-1$, con $m \geq 3$, no contienen dichas secuencias.

Una vez tenemos todos los componentes, podemos llegar a una definición parcial de la MFN que es más que suficiente para obtener las fórmulas correspondientes a $p = 13$ y 15.

La MFN para $p = 13$:

$$\frac{\sum k^{13} - \sum k^{11}}{24} - \frac{\sum k^{7} - \sum k^{5}}{24} - 16200 \cdot NSC(2) = \varepsilon(13)$$

La MFN para $p = 15$:

$$\frac{\sum k^{15} - \sum k^{13}}{24} - \frac{\sum k^{7} - \sum k^{5}}{24} - 864 \cdot N(n+2,\ 4)^2 + 16200 \cdot NSC(2) = \varepsilon(15)$$

4.2.5 Simulación para $\varepsilon(13)$

1.- Primero calculamos $\varepsilon(13)$ con la función calculating_fireflies(13, 1), que a su vez nos devuelve un output con los primeros diez términos:

```
- The Faulhaber-Narayana Machine [P = 13] -

n=1: 0
n=2: 252
n=3: 43020
n=4: 1281420
n=5: 17031420
n=6: 139673520
n=7: 827012592
n=8: 3867076080
n=9: 15110005680
n=10: 51251193180
------------------------------
```

2.- Después de haber guardado $\varepsilon(13)$ en la variable fnm_expr, usamos el algoritmo que determina los dos coeficientes: sophie_algorithm(fnm_expr, [100, 2500], [55, 855]).

```
------------------------------
| 1, 100, 2500, ... (coefficient): + 648 |
| 1, 55, 855, ... (coefficient):   -396  |
------------------------------
```

3.- Una vez conocemos los coeficientes, solo restamos $\varepsilon(13)$ a fnm_expr, guardando la nueva expresión en la variable final_expr, y la comprobamos con la función validation(final_expr, 13).

```
------------------------------
| n | The Faulhaber-Narayana Machine | 1^13 + 2^13 + 3^13 + ... + n^13 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 8193 | 8193 |
| 3 | 1602516 | 1602516 |
| 4 | 68711380 | 68711380 |
| 5 | 1289414505 | 1289414505 |
| 6 | 14350108521 | 14350108521 |
| 7 | 111239118928 | 111239118928 |
| 8 | 660994932816 | 660994932816 |
| 9 | 3202860761145 | 3202860761145 |
| 10 | 13202860761145 | 13202860761145 |
------------------------------
<<The formula is correct>>
------------------------------
```

Como podemos observar en el output, la fórmula es correcta. Para obtenerla, solo tenemos que multiplicar por 24 la igualdad ($\mathrm{MFN} - \varepsilon(13) = 0$) y pasar los términos al lado derecho para despejar $\sum k^{13}$.

4.6 Análisis general

Dado que reutilizamos varias veces las fórmulas, se recomienda elaborar tarjetas de las secuencias y sus coeficientes, especialmente para las fórmulas recursivas, donde los patrones se hacen más evidentes. Este material no solo hace más visuales los patrones, sino que la construcción de la MFN puede convertirse también en una actividad menos abstracta y mas visual.

Una vez que tenemos bien definidas las tres fases a nivel técnico, podemos identificar con exactitud los puntos débiles y, a partir de ellos, crear distintas actividades didácticas que se dejarán a criterio del lector según lo considere conveniente.

Más allá de dar una lista de objetivos o aprendizajes esperados, me gustaría poner el foco en el mundo nuevo que se le presenta al alumno, el cual dista mucho del tradicional. En lugar de enfrentarse a un problema matemático cuya solución es determinista y única, nuestro proyecto invita a repensarlo varias veces para seguir avanzando entre potencias, haciendo que el alumno forme parte activa del quehacer matemático.

La implementación en SageMath nos posiciona en la vanguardia de la educación matemática a nivel global. Sin embargo, por diversos motivos, estas iniciativas son escasas en regiones menos desarrolladas, como Latinoamérica o África, donde docentes y gran parte de la población parten de una base material precaria y un entorno que no favorece la incubación de proyectos nacionales con enfoques modernos. Por ello, este proyecto puede ser el precursor de nuevas iniciativas de este tipo, tan necesarias en nuestra región.

Agradecimientos. Este texto no podría haber sido escrito sin la ayuda de mi abuela María Esther.

Referencias

[1] The Sage Developers, Sagemath, the Sage Mathematics Software System.
SageMath - Open-Source Mathematical Software System.

[2] Raayoni, G., Gottlieb, S., Manor, Y. et al. Generating conjectures on fundamental constants with the Ramanujan Machine. Nature 590, 67–73 (2021). https://doi.org/10.1038/s41586-021-03229-4

[3] Great Internet Mersenne Prime Search

[4] Chavez, Yasser A. (2025). Conjectures on the Sums of Powers of Natural Numbers Via Combinatorial Sequences. figshare. Preprint. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.30396238.v23

[5] Chavez, Yasser A. (2025). The World of Numbers: A Pedagogical Proposal. figshare. Dataset. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.29886221.v2

[6] Vecindario Psintar

Portada por https://www.freepik.es/

Palabras clave: Educación matemática , Pedagogía, Secuencias Numéricas, Combinatoria, Python.

Contacto: math.yasserarath@gmail.com

Kradnet #325:
Criptografía. Una propuesta pedagógica.

Yasser A. Chavez

Resumen. Este trabajo presenta una propuesta pedagógica para la enseñanza de la criptografía a través del estudio de ε(p), un objeto matemático cuyo descifrado —entendido como el cálculo de coeficientes de secuencias combinatorias— resulta computacionalmente accesible pero operativamente complejo para el ser humano. El análisis de ε(p) permite al estudiante comprender, mediante lápiz y calculadora, por qué ciertos sistemas criptográficos son seguros, al enfrentarse a la dificultad inherente de descomponer secuencias sin apoyo computacional. La propuesta integra la Máquina de Faulhaber-Narayana como marco teórico y concluye con una actividad lúdica ("Secuencias cruzadas") que modela, mediante un juego de preguntas con ventajas asimétricas, los principios fundamentales del intercambio de información en criptografía.

By Gustave Doré

Entre migajas y dagas:

El aroma del potaje no tardó en serpentear por la posada hasta llegar a los almacenes, donde Nessa duerme entre paja y alimentos, algo que la hacía un poco más afortunada que los desdichados que dormían afuera. La posada se encontraba en las alcantarillas de la ciudad, por lo que aquellos quedaban expuestos a animales como ratas.

Aquel olor anunciaba que la vida en Kradnet había comenzado. Los distintos mercaderes se iban agrupando en el mercado central, que está rodeado por los principales comercios, el orfanato, haciendas y el castillo del Jarl Psiju, quien gobierna la ciudad con su corte y la guardia de Kradnet, encargada de establecer el orden en la ciudad y en la región.

La serpiente de humo logró infiltrarse en los frecuentes sueños de Nessa, haciendo que esta se levantara de golpe, como si de la mordedura de una serpiente real se tratara, siguiendo el rastro que esta dejó.

—Siéntate a comer —dijo Camila, la madre de Nessa, mientras dejaba un plato de madera con el potaje en la mesa.

Cuando Nessa estaba por terminar de comer el potaje, irrumpió en la posada Feit, el tío de Nessa, que era un maestro ladrón y miembro de "Entre migajas y dagas", el gremio de ladrones de Kradnet que se reunía en las alcantarillas para planear atracos o robos.

—¡Es hoy! —exclamó de felicidad Feit—. Ayer no eran nadie; desde ahora serán ladrones —añadió mientras cortaba un trozo de pan con su navaja dorada.

Nessa se incorporó a la fila de niños que seguían a Feit cantando las canciones del gremio de ladrones. Tal escena recordaba a los encantadores de serpiente.

—Bienvenidos —dijo Feit, abriendo la puerta del gremio de ladrones, que los niños muchas veces habían visto pero a la que nunca habían entrado.

La primera habitación no tenía el aspecto de ser de un gremio de ladrones; era más parecida a un salón de clases, con bancos y mesas hechos de madera desgastada y un librero repleto de libros. Pero lo que más llamaba la atención era un artefacto de madera que parecía ser una calculadora mecánica con cientos de engranajes que, por su aspecto, parecía calcular números enormes.

—¿Qué es eso? —preguntó un niño señalando el artefacto.

—Un mueble viejo —respondió Feit, tapando rápido el artefacto con una manta.

—Pueden sentarse —dijo Feit mientras dejaba hojas en las mesas con secuencias numéricas.

1 Introducción

Kradnet #325 es mi tercer universo literario-pedagógico, en el cual exploraré cuestiones más oscuras relacionadas con la ética. El universo está ambientado en la Edad Media y surge de la fusión de la serie *Dark* (Netflix), el videojuego *The Elder Scrolls V: Skyrim* —despojado de su fantasía— y mi propio inconsciente (sueños).

El nombre del universo proviene de invertir las palabras Dark y Riften (la ciudad de los ladrones y, por ende, la más corrupta). El número #325 es el primer término mayor a 1 que proviene de la secuencia que me atormentó durante un mes, relacionada con la suma de potencias para P = 13.

El papel de Skyrim en este universo es proporcionar el mundo físico y todo lo que está sujeto a ese contexto histórico. Por su parte, Dark actuará como el puente que conecte Kradnet #325 con Vecindario Psintar, bajo la premisa de que el futuro modifica el pasado. De este modo, los sueños de un personaje de Kradnet #325 lo conectarán con el siglo XXI de Vecindario Psintar, funcionando como una especie de revelación matemático-social.

A través de esa conexión, dicho personaje podrá comprender que los problemas sociales pueden resolverse con las matemáticas, y es precisamente la ausencia de ordenadores en el oscuro universo de Kradnet #325 lo que lo convierte en el vehículo perfecto para enseñar conceptos como la criptografía y la ética.

Si bien la ética y la pedagogía siempre han estado unidas dada su naturaleza, las matemáticas, al ser una ciencia más abstracta, no necesariamente tienen que preocuparse por asuntos éticos. Sin embargo, es innegable que algunas áreas de las matemáticas nacieron de la ética o, al menos, esta llegó a impulsar otras áreas, como la criptografía.

Por lo tanto, en este trabajo se explorará la criptografía desde dos perspectivas. Por un lado, desde la óptica tradicional, donde la ética está más presente —como en el cifrado César, en el que, si un intruso compromete el mensaje, puede poner en peligro a militares, ciudadanos, etc.—. Por otro lado, desde una óptica puramente matemática, en la que se separa la ética de la criptografía y se realiza un análisis para determinar qué es lo que hace que un objeto matemático sea intrínsecamente un fenómeno criptográfico.

De este modo, se busca integrar dos perspectivas que suelen enseñarse por separado. Uno podría debatir tal aseveración con uno de los ejemplos típicos, como los números primos: el alumno puede llegar a entender por qué es importante que sus mensajes no puedan ser leídos por otra persona, pero realmente no comprende por qué el criptosistema RSA es seguro. La teoría de números no llega a permear lo suficiente en el currículo como para tener cubiertas ambas perspectivas.

2 Fenómeno criptográfico

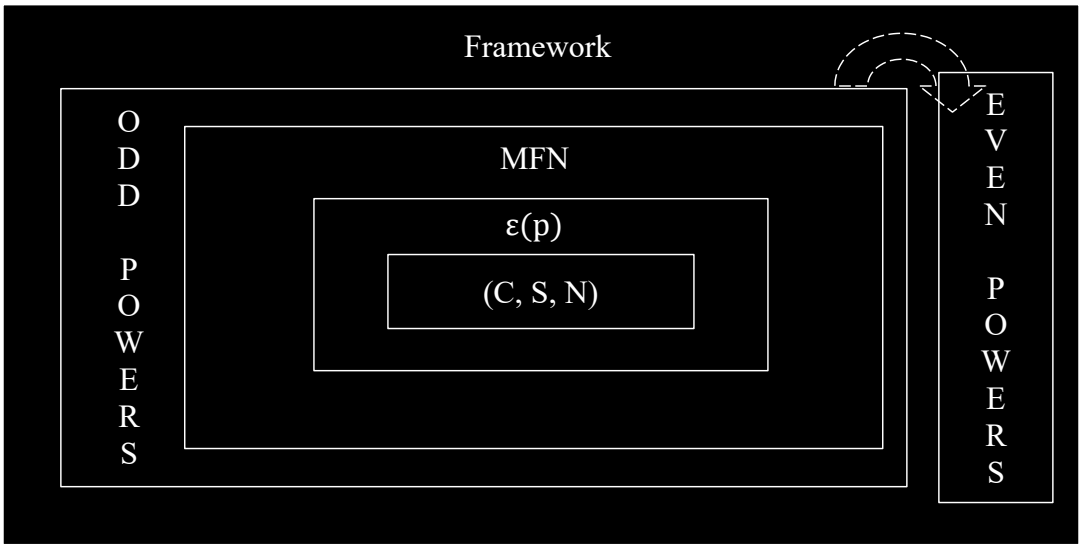
El fenómeno criptográfico a estudiar es ε(p), el cual se detalla en [Sec 2.2, 1]. ¿Por qué nos interesa estudiar este objeto matemático? Porque la criptografía emerge de forma natural en ε(p). Si el alumno comprende por qué ε(p) es difícil de descifrar —entendiendo "descifrar" como calcular los coeficientes de las secuencias que lo conforman—, entenderá indirectamente el concepto de criptografía y el motivo por el cual se confía en otros objetos matemáticos, como los números primos.

Si bien ε(p) no es del todo críptico para un software matemático —dado que al expandirlo podemos ver las huellas algebraicas de las secuencias y, a partir de esos coeficientes, determinar su coeficiente en ε(p)—, para un ser humano expandir secuencias resulta extremadamente tedioso, por lo que descartamos tal enfoque.

Para un estudio más profundo de ε(p), es necesario discernir todos los componentes que lo conforman o que influyen en él, con el objetivo de hallar una forma de atacar ε(p) que resulte más eficiente y creativa que el uso de un ordenador, ya que este puede conducir a una comprensión deficiente.

2.1 Análisis de ε(p)

Esquema del Framework (C, S, N)



El esquema anterior proporciona una visión general del framework, en la que se observa que la teoría predictiva, la máquina de Faulhaber-Narayana y ε(p) permiten prescindir de las potencias pares si y solo si existe una teoría capaz de predecir los coeficientes en ε(p).

Por lo tanto, optaremos por un enfoque híbrido que combine la MFN, la teoría algebraica sobre sumas de potencias y técnicas operativas para las secuencias (C, S, N), con el fin de refinar la operatividad que conecta las potencias pares e impares.

2.2 Calcular $\varepsilon(13)$ sin software/ordenador

Sabemos que $\varepsilon(13)$ puede estar compuesto por las secuencias $N(n+2,4)^2$ (de grado n^{12}) y $NSC(1)$ (de grado n^{10}). No obstante, es necesario comenzar siempre por la secuencia de grado superior, ya que $N(n+2,4)^2$ puede contener también el término n^{10}, lo que introduce ruido en el análisis.

¿Cómo podemos determinar si ε(13) está compuesto por dos secuencias? Recordemos que $\varepsilon(13) = 0, 252, 43020\ldots$ Para averiguarlo, basta con dividir 43020 entre 252. Si el resultado es exactamente 55, entonces el coeficiente de $NSC(1)$ es 252 y no hay otra secuencia; de lo contrario, ambas secuencias están presentes.

MFN para $p = 13$ (solo tomando encuenta los coeficientes de n^{12})

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24}\left[\frac{13}{12} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)\right] \\ = & \frac{1}{24}\left[\frac{13}{12} - \frac{1}{3}\right] \\ = & \frac{1}{24}\left[\frac{3}{4}\right] \\ = & \frac{1}{32} \end{aligned}$$

$13/12$: es el coeficiente de n^{12} en $\sum k^{13}$.
$1/12$: es el coeficiente de n^{12} en $\sum k^{12}$.
$1/4$: es el coeficiente de n^{12} en $NSC(1)$.

Nota: El coeficiente 16200 es incorrecto —hubo una pequeña imprecisión— y el valor correcto es 5400. En consecuencia, el factor $(3)\cdot 5400 = 16200$ no es un factor común.

El coeficiente difícil de obtener es el de $NSC(1)$; por lo tanto, trataremos de obtener el coeficiente de $N(n+2,4)^2$ en $\sum k^{13}$, ya que solo dos secuencias contienen el término n^{12}: $NSC(1)$ y $N(n+2,4)^2$. De este modo, solo debemos restar uno para conocer el otro.

Para calcular $\sum k^{13}$ podemos hacerlo desde $\sum k^{11}$ o $\sum k^{12}$ pero eligiéremos $\sum k^{11}$ donde podemos usar la siguiente identidad (NCC)

$$N(n+2,\ 4) = 5\cdot C(n+3,\ 6) + C(n+2,\ 4).$$

Es fundamental recordar la identidad que relaciona $\mathrm{NSC}(1)$ y $\mathrm{N}(\mathrm{n}+2,4)^2$. Dicha identidad surge cuando se intenta calcular $\sum \mathrm{k}^{11}$ partiendo de $\sum \mathrm{k}^{9}$, esto es, multiplicando $\mathrm{k}^2 \cdot \mathrm{NSC}(1)$:

$$5 \cdot \sum_{k}^{n} \Delta N(n+3,\ 6) \cdot k^2 \ +\ NSC(1) \ =\ N(n+2,\ 4)^2.$$

Dado que nuestro enfoque es puramente operativo, conviene recordar la secuencia numérica $\sum \Delta \mathrm{N}(\mathrm{n}+2,4) \cdot \mathrm{k}^2 = 0, 0, 9, 329, 4704\ldots$ Aunque esta secuencia parece caótica en principio, al aplicar nuestra identidad y despejar obtenemos $(\mathrm{N}(\mathrm{n}+2,4)^2 - \mathrm{NSC}(1))/5$.

Ahora que disponemos de las dos identidades y de la teoría predictiva (MFN), podemos prescindir de las demás secuencias y concentrarnos en $\mathrm{N}(\mathrm{n}+2,4)^2$, donde, paradójicamente, buscamos esta misma secuencia dentro de sí misma. Al expandir la identidad (NCC), observamos que el producto $\mathrm{C}(\mathrm{n}+3,6) \cdot \mathrm{C}(\mathrm{n}+2,4)$ genera la secuencia $0, 0, 9, 329\ldots$; por lo tanto, basta con aplicar la identidad

$$50 \cdot \sum_{k}^{n} \Delta N(n+3,\ 6) \cdot k^2 \ =\ 50 \cdot \frac{N(n+2,\ 4)^2 \ -\ NSC(1)}{5} \ =\ 10 \cdot \left(N(n+2,\ 4)^2 \ -\ NSC(1)\right).$$

¿Cómo podemos saber que $\mathrm{C}(\mathrm{n}+3,6) \cdot \mathrm{C}(\mathrm{n}+2,4)$ contenía la secuencia que buscábamos? No hay un método establecido para determinarlo de antemano; por ello, debemos calcular los primeros términos y proceder por descarte. Obsérvese que $\mathrm{N}(\mathrm{n}+2,4)^2$ presentaba un coeficiente de 1728 en $\sum \mathrm{k}^{11}$, de modo que el coeficiente en $\sum \mathrm{k}^{13}$ es $1728 \cdot 10 = 17280$.

Una vez que conocemos el coeficiente de $\mathrm{N}(\mathrm{n}+2,4)^2$ en $\sum \mathrm{k}^{13}$, que es 1728, podemos obtener el coeficiente de $\mathrm{NSC}(1)$ mediante la siguiente resta

$$\frac{13}{12} \ -\ 10 \cdot \frac{1}{12} \ =\ \frac{13}{12} \ -\ \frac{5}{6} \ =\ \frac{1}{4}.$$

Una vez obtenido el coeficiente ¼, podemos retomar el razonamiento inicial de la MFN. Dado que el coeficiente de n^{12} en $\varepsilon(13)$ es $1/32$, podemos calcular el coeficiente de $\mathrm{N}(\mathrm{n}+2,4)$ en $\varepsilon(13)$ mediante la siguiente operación

$$1728 \cdot 12 \cdot \frac{1}{32} \ =\ 648.$$

La operación utilizada parte del hecho de que el coeficiente del término n^{12} en $\mathrm{N}(\mathrm{n}+2,4)^2$ es $1/20736$. Por lo tanto, solo tenemos que despejar en la ecuación $(1/20736) \cdot \mathrm{x} = 1/32$, obteniendo $\mathrm{x} = 20736/32$. Sabemos, además, que $1728 \cdot \mathrm{N}(\mathrm{n}+2,4)^2 = (1/12) \cdot \mathrm{n}^{12}$, lo que implica que $20736 = 1728 \cdot 12 = 20736$, verificando así la coherencia del cálculo.

Si retomamos la secuencia $\varepsilon(13) = 0, 252, 43020...$, podemos deducir que $\mathrm{NSC}(1)$ tiene signo negativo. Esto se debe a que $\mathrm{N}(n+2, 4)^2$ tiene signo positivo y, además, 252 es menor que 648. En consecuencia, el coeficiente de $\mathrm{NSC}(1)$ en $\varepsilon(13)$ es $252 - 648 = -396$.

Conviene recordar que la divisibilidad de una secuencia introduce un factor en el resultado final. Por ejemplo, el producto $\mathrm{C}(n+3, 6)\cdot\mathrm{C}(n+2, 4)$ es divisible por 5. No obstante, dado que la identidad incluye un coeficiente $1/5$, este factor se cancela y únicamente conservamos el primer coeficiente, 10, que surge al expandir la identidad (NCC).

2.3 ε(p), p > 13

La solución presentada en la sección 2.2 nos brinda una comprensión profunda y estructural de $\varepsilon(p)$, lo cual permite entender su comportamiento para valores de p mayores que 13. De este análisis se desprende que $\varepsilon(p)$ posee un conjunto limitado de secuencias.

	$\mathrm{NSC}(1)$	$\mathrm{N}(n+2, 4)^2$	$\mathrm{NSC}(2)$	$\mathrm{C}(n+2, 4)^4$
$\varepsilon(13)$	■	■		
$\varepsilon(15)$	■			
$\varepsilon(17)$	■	■	■	■

La tabla anterior revela que $\varepsilon(p)$ opera mediante un mecanismo similar al de una cebolla: obliga a comenzar con la secuencia de mayor orden, ya que, de no hacerlo, las secuencias se solaparían en los términos inferiores a $n\text{^}(p - 1)$.

Por consiguiente, para determinar el coeficiente de $\mathrm{C}(n+2, 4)^4$ en $\varepsilon(17)$, se requieren tres elementos: el coeficiente del término n^{16} en $\mathrm{C}(n+2, 4)^4$, el coeficiente de dicha secuencia en $\sum k^{17}$ y el coeficiente del término n^{16} en $\varepsilon(17)$. De ello se desprende que la seguridad de $\varepsilon(p)$ radica en su operatividad, ya que el cálculo del coeficiente base de $\mathrm{C}(n+2, 4)^4$ y del coeficiente del término n^{16} en NSC(3), pese a ser labores minuciosas, sigue un proceso determinista.

Por coeficiente base entendemos la expansión de la secuencia sin la inclusión de factores adicionales. Es el caso, por ejemplo, de NSC(3), la cual aparece acompañada de los factores o coeficientes provenientes de la teoría predictiva (MFN).

De lo anterior se infiere que el cálculo de $\varepsilon(17)$ requiere hallar una expresión equivalente a $\mathrm{C}(n+2, 4)^4$ que, al multiplicarse por k^2, permita filtrar la secuencia $\mathrm{C}(n+2, 4)^4$, dado que esta está contenida en sí misma. Sin este procedimiento, resulta imposible encontrar una solución valiéndose únicamente de lápiz, papel y una calculadora.

3 Actividad lúdica

Si deseamos abordar $\varepsilon(p)$ desde una perspectiva lúdica, podemos emplear combinaciones lineales —como $\mathrm{NSC}(1)$ o cualquier otra— formadas a partir de las secuencias $\mathrm{C}(n,k)$, $\mathrm{S}(n,k)$ y $\mathrm{N}(n,k)$. A continuación, proponemos el siguiente juego.

Secuencias cruzadas

+	-
1	1
55	49
855	126
7105	1176

El juego consiste en descomponer una secuencia, por ejemplo $\mathrm{NSC}(1) = 6{\cdot}\mathrm{N}(n{+}4, 6) + \mathrm{S}(n{+}4, 5)^2$, en dos variantes: una en la que ambas secuencias se suman, y otra en la que la secuencia $\mathrm{N}(n{+}4, 6)$ se resta. Como resultado, obtenemos dos secuencias que, individualmente, conservan su inteligibilidad.

Al combinar ambas secuencias —la positiva y la negativa— se obtiene $(a + b) + (a - b) = 2a$, lo que revela una de las secuencias. De este modo, la dinámica de la actividad se basa en el intercambio de información entre dos equipos, de forma análoga al juego de mesa “Adivina quién?”.

Ganará el juego aquel equipo que consiga determinar el quinto término de su respectiva secuencia, ya sea el valor positivo $(+40180)$ o el negativo (-26068).

Lo interesante de la actividad radica en que el equipo $(+)$ sabe que los términos del equipo (-) son menores que los suyos, al disponer de una cota superior definida. El equipo (-), por su parte, desconoce el límite superior de crecimiento de la secuencia, pero conoce el segundo término de $\mathrm{S}(n{+}2, 4)^2$, que es $49 = 7^2$. Así, ambos equipos parten con ventajas asimétricas, lo que los lleva a adoptar estrategias diferentes al momento de interrogarse sobre los términos.

La única regla del juego es que no está permitido preguntar de forma directa "¿Tu segundo término es 49?". En su lugar, las preguntas deben ser del tipo: "¿Tu segundo término es un cuadrado?" o "¿Tu segundo término es mayor que 40?", etc.

Agradecimientos. Este texto no podría haber sido escrito sin la ayuda de mi abuela María Esther.

Referencias

[1] Chavez, Yasser A. (2026). The Calculating Fireflies: Symbolic Computation. A Pedagogical Proposal.. figshare. Preprint. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.30989386.v3

Palabras clave: Criptografía, educación matemática, secuencias numéricas, teoría de números, pedagogía.

Contacto: math.yasserarath@gmail.com